Aritmética

© Dpto. Pedagógico ***TRILCE***
© Derechos de Edición
Asociación Educativa ***TRILCE***

Tercera Edición, 2007.

Todos los Derechos Reservados. Esta publicación no puede ser reproducida, ni en todo ni en parte, ni registrada en, o transmitida por, un sistema de recuperación de información, en ninguna forma y por ningún medio, sea mecánico, fotoquímico, electrónico, magnético, electroóptico, por fotocopia, o cualquier otro, sin el permiso previo de la editorial.

INTRODUCCIÓN

El presente libro tiene como objetivo incentivar e incrementar el estudio de la Aritmética, la cual forma parte de la Matemática. Pero, *amigo lector , ¿Qué es la Matemática?..... es una expresión de la mente humana que refleja la voluntad activa, la razón contemplativa y el deseo de la perfección estética, sus elementos básicos son: la lógica e intuición, análisis y construcción, generalidad y particularidad y lo que podría ser más importante, la dosificación de cada uno de sus temas.*

Las primeras referencias de la Matemática datan del tercer milenio a.C. en Babilonia y Egipto, que apuntan a la prevalencia de la Aritmética que, literalmente, significa el arte de contar. La palabra deriva del griego aritmētikē*, que combina dos palabras: arithmos, que significa "número", y* technē*, que se refiere a un arte o habilidad.*

*La Aritmética se remonta a los primeros albores de la vida humana, las tribus más primitivas apenas podían distinguir entre uno y muchos. Más adelante, utilizaron un lenguaje corporal (dedos, manos, codos, pies) y con ayuda de ramas y piedras consiguieron contar números cada vez más grandes. No hay forma de establecer, a ciencia cierta, cuando el hombre comenzó a utilizar la Aritmética; aunque sospechamos que el hombre primitivo pudo conocer cuántos animales poseía, haciendo corresponder a cada animal una pequeña piedra; si tiempo después tenia más piedras que animales, era porque había perdido alguno de ellos. Este primitivo concepto de cardinalidad fue el origen del concepto del número como un ente abstracto y dio comienzo al difícil y prolongado parto de una de las ramas más antiguas de la Matemática, como es la Aritmética, llamada después por Gauss : "**La reina de la Matemática".***

Los babilónicos fueron los primeros que utilizaron el cero para los cálculos matemáticos. Los signos que representan los números no han sido siempre los mismos, por ejemplo, en Mesopotamia se representaban en forma de cuña; en Egipto, mediante jeroglíficos; en Grecia, con las letras de su alfabeto; en Roma, con los símbolos: I, V, X, … y, en la actualidad, utilizamos los símbolos indo-arábigos: 0, 1, 2, 3, …,9

La numeración posee un significado muy profundo puesto que es la aplicación del conjunto de los números en el conjunto de los objetos numerados y contribuye a poner "orden" a los objetos que componen el conjunto. Cuando los pueblos comenzaron a utilizar los números, sólo conocían una forma de operar con ellos: contar. Poco a poco, fueron descubriendo las cuatro operaciones: adición, sustracción, multiplicación y división; pero ello fue un proceso lento hasta llegar a la creación de la teoría de números, creada en su forma primitiva por Euclides, con su famoso algoritmo hasta la llegada de Fermat con la construcción de la nueva teoría de números en el siglo XVII, además de los importantes aportes de matemáticos de la talla de Euler, Gauss, Cantor, Dedekind, Boltzano, entre otros.

¿Cómo utilizar el texto?

Cada capítulo del libro está compuesto por un breve marco teórico y 60 ejercicios que han sido ordenados en forma creciente según su nivel de dificultad y cubren la totalidad de cada tema; pero ello no significa que tenga que ser estudiado problema por problema; capítulo por capítulo, ya que puede ser utilizado en forma independiente y de acuerdo al nivel de cada estudiante.

Los problemas están seleccionados como básicos los 20 primeros, como nivel intermedio los 20 siguientes que contienen exámenes de admisión de las diversas universidades nacionales y particulares y finalmente los 20 últimos problemas de alto nivel académico; muchos de ellos, creados recientemente, en forma especial, para el presente texto.

Pero amigo lector, no se alarme ni se impaciente si no puede resolver algún problema. Consulte a su profesor, deje que él sea su guía en el uso del presente texto.

Asimismo, queremos agradecer a todos los profesores de la plana de Aritmética de la Organización Trilce por sus aportes y colaboraciones para la elaboración del presente texto.

Nuestro trabajo ha sido realizado bajo riguroso cuidado y dedicación volcando en él los años de experiencia en la docencia Pre - Universitaria.

Finalmente mucho agradecemos a los alumnos y colegas nos hagan llegar sus observaciones y sugerencias con respecto al contenido de nuestro humilde trabajo.

Capítulo

1 LÓGICA PROPOSICIONAL

INTRODUCCIÓN

La lógica estudia la forma de razonamiento. Es una disciplina que se utiliza para determinar si un argumento es válido, tiene aplicación en todos los campos del saber; en la filosofía, para determinar si un razonamiento es válido o no, ya que una frase puede tener diferentes interpretaciones; sin embargo la lógica permite saber el significado correcto. Los matemáticos usan la lógica, para demostrar teoremas e inferir resultados que puedan ser aplicados en investigaciones . En la computación, para revisar programas y crear sus algoritmos, es utilizada en el diseño de computadoras. Existen circuitos integrados que realizan operaciones lógicas con los bits, gracias a estos se ha desarrollado las telecomunicaciones (telefonía móvil, internet, ...)

ENUNCIADO: Es cualquier frase u oración que expresa una idea.

PROPOSICIÓN: Son oraciones aseverativas que se pueden calificar como verdaderas o falsas. Se representan con las letras minúsculas del abecedario: p ; q ; r ; s.

Ejemplo:

* Túpac Amaru murió decapitado.
* $9 < 10$
* $45 = 3 - 2$

ENUNCIADO ABIERTO: Son enunciados que pueden tomar cualquiera de los 2 valores de verdad.

Ejemplo:

Si : $P(x) : x > 6$

Se cumple que:

$P(9) : 9 > 6$ es verdadero

$P(2) : 2 > 6$ es falso

El valor de verdad de P(x) depende del valor de x, también, se le conoce como función proposicional.

CLASES DE PROPOSICIONES:

1. ***Proposición Simple:*** Son proposiciones que no tienen conjunciones gramaticales ni adverbio de negación.
   Ejemplo:
   * Cincuenta es múltiplo de diez.

2. ***Proposición Compuesta:*** Formada por dos o más proposiciones simples unidas por conectivos lógicos o por el adverbio de negación.
   Ejemplo:
   * 29 es un número primo y 5 es impar.

CONECTIVOS LÓGICOS: Símbolos que enlazan dos o más proposiciones simples para formar una proposición compuesta.
Los conectores lógicos que usaremos son :

SÍMBOLO	*OPERACIÓN LÓGICA*	*SIGNIFICADO*
$\sim$	Negación	No p
$\wedge$	Conjunción	p y q
$\vee$	Disyunción	p o q
$\rightarrow$	Condicional	Si p, entonces q
$\leftrightarrow$	Bicondicional	p si y sólo si q
Δ	Disyunción Exclusiva	"o ..... o ....."

OBS: La negación es un conector monádico, afecta solamente a una proposición.

OPERACIONES LÓGICAS Y TABLAS DE VERDAD

La validez de una proposición compuesta depende de los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen y se determina mediante una tabla de verdad.

1. ***Conjunción:*** Vincula dos proposiciones mediante el conectivo lógico "y".

Tabla de Verdad

p	q	p $\wedge$ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

2. *Disyunción:* Vincula dos proposiciones mediante el conectivo lógico "o".

Tabla de Verdad

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

3. *Disyunción Exclusiva:* Vincula dos proposiciones mediante el conectivo lógico: "o ....., o ....."

Tabla de Verdad

p	q	p Δ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

4. *Condicional:* Vincula dos proposiciones mediante el conectivo lógico :
"Si ....., entonces ....."

Tabla de Verdad

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

5. *Bicondicional:* Vincula dos proposiciones mediante el conectivo lógico:
"..... si y sólo si ....."

Tabla de Verdad

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

6. *Negación:* Afecta a una sola proposición. Es un operador monádico que cambia el valor de verdad de una proposición:

Tabla de Verdad

p	~ p
V	F
F	V

OBSERVACIÓN: La cantidad de filas en una tabla es:

$$\#\ \text{filas} = 2^n$$

Donde n es la cantidad de proposiciones simples.

IMPORTANTE:

* Cuando los valores del operador principal son todos verdaderos se dice que el esquema molecular es ***tautológico***.

* Se dirá que el esquema molecular es ***contradictorio*** si los valores del operador principal son todos falsos.

* Si los valores del operador principal tiene por lo menos una verdad y una falsedad se dice que es ***contingente o consistente***.

LEYES DE ÁLGEBRA PROPOSICIONAL

Son equivalencias lógicas que nos permiten reducir esquemas moleculares complejos y expresarlos en forma más sencilla. Las demostraciones de dichas leyes se hacen construyendo la tabla de verdad en cada caso.

Principales Leyes:

a. Ley de Idempotencia:

$$p \vee p \equiv p$$
$$p \wedge p \equiv p$$

b. Ley Conmutativa:

$$p \vee q \equiv q \vee p$$
$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

c. Ley Asociativa:

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$
$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

d. Ley Distributiva:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$
$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

e. Ley de la Doble Negación:

$$\sim (\sim p) \equiv p$$

f. Leyes de Identidad:

$$p \vee V \equiv V \ ; \ p \vee F \equiv p$$
$$p \wedge V \equiv p \ ; \ p \wedge F \equiv F$$

g. Leyes del Complemento:

$$p \vee \sim p \equiv V$$
$$p \wedge \sim p \equiv F$$

h. Ley del Condicional:

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

i. Ley de la Bicondicional:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$
$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$
$$p \leftrightarrow q \equiv \sim (p \,\Delta\, q)$$

j. Ley de Absorción:

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$
$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$
$$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$$
$$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$$

k. Leyes de "De Morgan":

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$
$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

CUANTIFICADORES:

1. Cuantificador Universal: Sea la función proposicional $f_{(x)}$ sobre un conjunto A, el cuantificador $\forall$ ("para todo") indica que todos los valores del conjunto A hacen que la función proposicional $f_{(x)}$ sea verdadera.

$\forall$ se lee : "Para todo"

Ejemplo:

Sea : $f_{(x)} : x^3 + 2 > 5$ donde $x \in N$
La proposición cuantificada es :

$\forall x \in N ; x^3 + 2 > 5$ es falsa.

2. Cuantificador existencial: Sea $f_{(x)}$ una función proposicional sobre un conjunto A el cuantificador $\exists$ (existe algún) indica que para algún valor del conjunto A, la función proposicional $f_{(x)}$ es verdadera.

$\exists$ se lee : "Existe algún"

Ejemplo:

Sea $f_{(x)} : x^2 - 5 < 8$, donde : $x \in Z^+$, la proposición:

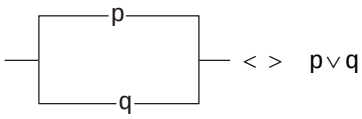
$\exists x \in Z^+ / x^2 - 5 < 8$ es verdadera:

CIRCUITOS LÓGICOS

Un circuito conmutador puede estar solamente en dos estados estables : cerrado o abierto, así como una proposición puede ser verdadera o falsa, entonces podemos representar una proposición utilizando un circuito lógico:

1. Circuito Serie: Dos interruptores conectados en serie representan una conjunción.

2. Circuito Paralelo: Dos interruptores conectados en paralelo representan una disyunción.



LÓGICA BINARIA

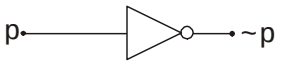
La lógica binaria trata con variables que toman 2 valores discretos y con operaciones que asumen significado lógico, para este propósito es conveniente asignar los valores de 1 y 0.

PRINCIPALES COMPUERTAS LÓGICAS

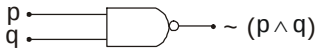
* Compuerta AND de dos entradas.

* Compuerta OR de dos entradas

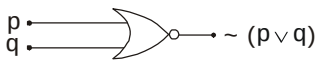
* Compuerta NOT



* Compuerta NAND de dos entradas



* Compuerta NOR de dos entradas



EJERCICIOS PROPUESTOS

01. De los siguientes enunciados:
* Qué rico durazno.
* 7 + 15 > 50
* $x^2 + y^2 = 25$

¿Qué alternativa es correcta?

a) Una es proposición.
b) Dos son enunciados abiertos.
c) Dos son expresiones no proposicionales.
d) Dos son proposiciones.
e) Todas son proposiciones.

02. ¿Cuántas de las siguientes expresiones son proposiciones?
* ¡Dios mío .... se murió!
* El calor es la energía en tránsito.
* Baila a menos que estés triste.
* Siempre que estudio, me siento feliz.
* El delfín es un cetáceo, ya que es un mamífero marino.

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

03. Dadas las siguientes expresiones:
* El átomo no se ve, pero existe.
* Los tigres no son paquidermos, tampoco las nutrias.
* Toma una decisión rápida.
* Hay 900 números naturales que se representan con tres cifras.
* La Matemática es ciencia fáctica.
* Es imposible que el año no tenga 12 meses.

¿Cuántas no son proposiciones simples?

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

04. Hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

$(3+2=5)\vee(7-2=11)$

$(4-1=3)\rightarrow(2-10=-8)$

$(3+7=10)\wedge(12>5)$

$\left(1^2=2\right)\leftrightarrow\left(1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\right)$

a) VVFV b) VFVV c) VVVV
d) VVVF e) FVVV

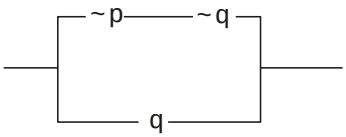
05. Determinar el valor de verdad de cada una de la siguientes proposiciones:
I. Si : 3 + 1 = 7, entonces : 4 + 4 = 8
II. No es verdad que :
2 + 2 = 5 si y solo si 4 + 4 = 10.
III. Madrid está en España o Londres está en Francia.

a) VFV b) VVV c) VFF
d) FVF e) FFF

06. Si : $(p\wedge\sim q)\rightarrow r$; es falsa, determinar los valores de verdad de "p", "q" y "r".

a) VVF b) VFF c) VVV
d) VFV e) FFF

07. Simbolizar:



Si la proposición que se obtiene es falsa.
¿Cuáles son los valores de p y q respectivamente?

a) VV b) VF c) FV
d) FF e) No se puede precisar

08. Si la proposición: $(p\rightarrow\sim q)\vee(\sim r\rightarrow s)$ es falsa, deducir el valor de verdad de :

$$(\sim p\wedge\sim q)\vee\sim p$$

a) V b) F
c) V o F. d) No se puede determinar.
e) Es V si p es F.

09. Si la proposición compuesta:

$$(p\wedge q)\rightarrow(r\vee t)$$

Es falsa. Indicar las proposiciones que son verdaderas:

a) p ; r b) p ; q c) r ; t
d) q ; t e) p ; r ; t

10. Si "p" es una proposición falsa, determina el valor de verdad de la expresión:

$$\{(p\rightarrow q)\vee[r\rightarrow(\sim q\wedge p)]\}\rightarrow(r\wedge p\wedge q)$$

a) Verdadero.
b) Falso.
c) Verdadero o falso.
d) Verdadero sólo si q es verdadero.
e) Falso sólo si r es falso.

11. Si la proposición:

$$(p\wedge q)\rightarrow(q\rightarrow r)$$

es falsa, hallar el valor de verdad de las siguientes fórmulas:
I. $\sim(p\vee r)\rightarrow(p\vee q)$
II. $(p\vee\sim q)\rightarrow(\sim r\wedge q)$
III. $[(p\wedge q)\vee(q\wedge\sim r)]\leftrightarrow(p\vee\sim r)$

a) VVF b) VFV c) VVV
d) VFF e) FVV

12. Los valores de verdad de las proposiciones "p" , "q" , "r" y "s" son respectivamente V, F, F y V.
Obtener los valores de verdad de:

I. $[(p \vee q) \vee r] \wedge s$

II. $r \rightarrow (s \wedge p)$

III. $(p \vee r) \rightarrow (r \wedge \sim s)$

a) VFF b) FVV c) VVV
d) VVF e) FFF

13. Si la proposición:

$$p \rightarrow (r \vee s)$$

Es falsa, ¿cuántas de las siguientes proposiciones son verdaderas?

I. $(\sim s \vee t) \vee \sim p$

II. $r \leftrightarrow p$

III. $t \rightarrow \sim r$

IV. $(r \rightarrow p) \vee (s \rightarrow t)$

a) Ninguna b) Una c) Dos
d) Tres e) Cuatro

14. Si la proposición compuesta:

$$\sim [(p \wedge \sim r) \rightarrow (r \Delta \sim q)]$$

no es falsa. Hallar el valor de verdad de las proposiciones r, p y q respectivamente.

a) FVV b) VVF c) VFV
d) FVF e) VFF

15. De la falsedad de la proposición :
$(p \rightarrow \sim q) \vee (\sim r \rightarrow s)$ se deduce que el valor de verdad de los esquemas:

I. $(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim q)$

II. $(\sim r \vee q) \leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$

III. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$

Son respectivamente :

a) VFV b) FFF c) VVV
d) VVF e) FFV

16. Sean las proposiciones:

* $p_{(x)} : \forall x \in R \ , \ x^0 = 1$

* $q_{(y)} : \exists y \in N \ / \ y^2 \leq 0$

* $r_{(z)} : \forall z \in R \ , \ z^2 - 9^2 = (z+3)(z-3)$

Indique el valor de verdad de:
$p \leftrightarrow q \ , \ p \rightarrow r \ , \ r \vee q$

a) FFV b) FVV c) VFV
d) VVV e) FFF

17. Sea : U = {1 , 2 , 3}, el conjunto universal.
Hallar el valor de verdad de:

I. $\exists x , \forall y / x^2 < y + 1$

II. $\forall x , \exists y / x^2 + y^2 < 12$

III. $\forall x , \forall y / x^2 + y^2 < 12$

IV. $\exists x , \exists y / x^2 + y^2 < 12$

a) VFVF b) VVFF c) VVVF
d) VVVV e) VVFV

18. Si : U = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5}
¿Cuál es el valor de verdad de las siguientes proposiciones?

I. $\forall x \in U : x \geq 3 \vee x < 4$

II. $\exists x \in U : x + 2 < 8 \Rightarrow x > 6$

III. $\forall x \in U : x + 2 = 5 \Leftrightarrow x - 1 = 2$

a) VVV b) FFV c) VFV
d) FVF e) FFF

19. Hallar los valores de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $(\forall x \in R , x = x) \wedge (\exists x \in R , x + 1 > x)$

II. $(\forall x \in R , x^2 \neq x) \wedge (\exists x \in Z , x + 1 \neq x - 1)$

III. $(\exists x \in N , x \neq 0) \Rightarrow (\forall x \in Q , x \neq 0)$

IV. $(\exists x \in N , x - 3 \leq x) \Rightarrow (\forall x \in R , x - 1 \geq x)$

a) FVVF b) FVVV c) VVFF
d) VFFF e) VVVF

20. Sea : A = {1 , 2 , 3}
Determinar el valor de verdad de las siguientes expresiones:

I. $\exists x \in A , \forall y \in A / x^2 < y + 1$

II. $\forall x \in A , \exists y \in A / x^2 + y^2 < 12$

III. $\exists x \in A , \forall y \in A , \exists z \in A / x^2 + y^2 < 2z^2$

IV. $\exists x \in A , \exists y \in A , \forall z \in A / x^2 + y^2 \leq 2z^2$

a) VFVV b) VVFV c) VVVF
d) FVVV e) VVVV

21. Señalar la expresión equivalente a la proposición:

$$(p \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee \sim p)$$

a) $q \rightarrow p$
b) $p \rightarrow q$
c) $(p \rightarrow q) \rightarrow \sim p$
d) $\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$
e) $(q \rightarrow p) \rightarrow \sim p$

22. Indicar el valor de verdad de:

I. $p \to (p \vee q)$

II. $(p \wedge q) \to (p \leftrightarrow q)$

III. $\sim [(p \wedge q) \to p]$

a) VVV b) VFV c) VVF
d) FVF e) FVV

23. Indicar el valor de verdad de:

I. $\sim [(p \wedge q) \to p]$

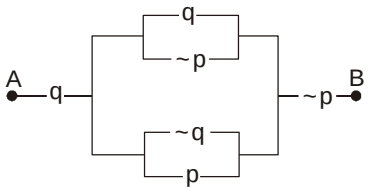
II. $(p \wedge q) \to p$

III. $(p \wedge q) \to (p \leftrightarrow q)$

IV. $p \to (p \vee q)$

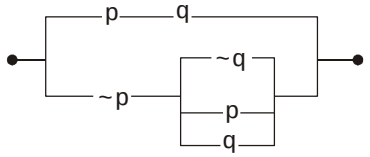
a) VFVF b) VVVF c) FVFV
d) VFFV e) FVVV

24. Simplificar el siguiente circuito:



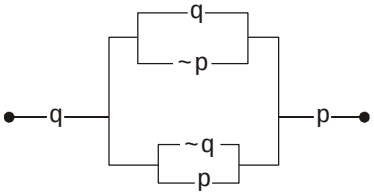
a) $p \vee q$ b) $\sim p \vee q$ c) $p \wedge q$
d) $\sim p \wedge q$ e) $\sim p \vee \sim q$

25. Hallar la proposición equivalente al circuito lógico:



a) p b) $p \vee \sim q$ c) $p \vee q$
d) $\sim p \vee q$ e) $p \wedge \sim q$

26. Simplificar la proposición que corresponde al circuito:



a) $p \vee q$ b) $\sim p \vee q$ c) $p \wedge q$
d) $\sim p \wedge q$ e) $\sim p \vee \sim q$

27. Simplificar a su mínima expresión:

$$(p \to q) \to [(p \wedge \sim q) \vee (p \vee q)]$$

a) p b) q c) $p \wedge q$
d) $p \vee q$ e) $p \to q$

28. Simplificar:

$$M = [(\sim p \vee q) \to (\sim q \vee p)] \wedge \sim (p \wedge q)$$

a) q b) p c) $\sim p$
d) $\sim q$ e) $\sim p \vee q$

29. Simplificar:

$$\sim [(\sim p \to q) \leftrightarrow \sim p] \to [q \to (p \to \sim q)]$$

a) $p \wedge \sim q$ b) $\sim p \vee q$
c) $\sim (p \wedge q)$ d) $\sim (p \vee q)$
e) $p \vee q$

30. De la veracidad de:

$$\sim [(p \to \sim q) \vee (\sim r \to \sim s)]$$

Deducir el valor de verdad de :

I. $\sim (\sim q \vee \sim s) \to \sim p$

II. $\sim (\sim r \wedge s) \leftrightarrow (\sim p \to \sim q)$

III. $p \to \sim [q \to \sim (s \to r)]$

a) FVV b) VVF c) FFV
d) VFF e) FFF

31. Indicar el valor de verdad de:

I. $(\sim p \wedge \sim q) \leftrightarrow (p \vee q)$
es una contradicción.

II. $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
es una tautología.

III. $[p \wedge (p \to q)] \to (q \,\Delta\, r)$
es una contingencia.

a) VVV b) VVF c) VFF
d) VFV e) FVV

32. De los siguientes esquemas:

* $(q \to r) \vee (\sim p \to r)$
* $[p \wedge (p \to q)] \to p$
* $[(\sim p \wedge q) \to \sim r] \to \sim [r \wedge \sim (p \vee \sim q)]$

Indicar en el orden dado cuál es Tautología (T), Contingencia (S) o Contradicción (C):

a) T , C , S b) T , S , C c) C , T , S
d) S , T , C e) S , C , T

33. Dado el siguiente enunciado:

$$\sim [\{\sim ([p \vee q] \wedge p) \Rightarrow \sim (q \wedge r)\} \vee q]$$

Según su tabla de verdad, podemos decir que dicha proposición es una:

a) Tautología. b) Contradicción.
c) Contingencia. d) Ley lógica.
e) Equivalencia lógica.

34. Si:

$a * b \equiv (a \to b) \vee [b \vee \sim (a \to b)]$

$a \heartsuit b \equiv \{a \vee [b \to (a \vee b)]\} \to \sim a$

Reducir :

$$\{[(p * q) \heartsuit r] * (\sim p * q)\} \heartsuit \{q * (p \wedge \sim q)\}$$

a) $\sim p$ b) V c) F
d) p e) q

35. Si se define:

$$p \Delta q \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

Simplificar: $\sim [(p \Delta \sim q) \to \sim q]$

a) $p \wedge q$ b) $p \vee q$ c) $\sim p \wedge q$
d) $\sim p$ e) $\sim q$

36. Se define el operador : (+), por la siguiente tabla:

p	q	p + q
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Simplificar: (p + q) + p

a) F b) $p \vee q$ c) $\sim q \vee q$
d) $p \wedge q$ e) V

37. Se definen los operadores # y θ por las siguientes tablas:

p	q	p # q
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p	q	p θ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Simplificar:

$$[(p \# \sim q) \theta p] \wedge (q \theta \sim p)$$

a) $q \to p$ b) $q \Delta p$ c) $p \vee q$
d) $p \wedge q$ e) $q \to \sim p$

38. Se definen los operadores "∇" y "$\uparrow$" por las siguientes tablas:

p	q	p ∇ q	p $\uparrow$ q
V	V	F	V
V	F	V	F
F	V	F	V
F	F	F	V

¿Cuál o cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

I. $p \to \sim q \equiv \sim (p \nabla \sim q)$

II. $\sim (p \nabla q) \vee (p \uparrow q) \equiv p \to q$

III. $\sim p \uparrow q \equiv \sim (\sim p \nabla q)$

a) Sólo I b) Sólo II c) I y II
d) I y III e) Todas

39. Si: $p * q \equiv p \to \sim q$

$p \# \sim q \equiv (p \leftrightarrow q) \to \sim p$

Simplificar:

$$[(p \wedge q) * (p \vee q) \# (p \to q)]$$

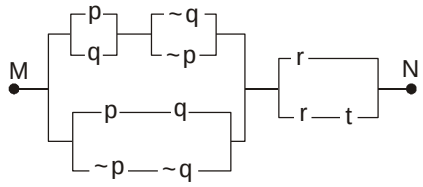
a) $\sim p \vee q$ b) p c) $\sim q$
d) $\sim p \vee \sim q$ e) $\sim p$

40. Si: $p * q = \sim p \wedge \sim q$

Expresar $\sim p$ usando únicamente el operador (*)

a) (p * p) * p
b) (p * ~p) * p
c) ~(p * q)
d) p * q
e) p * (q * q)

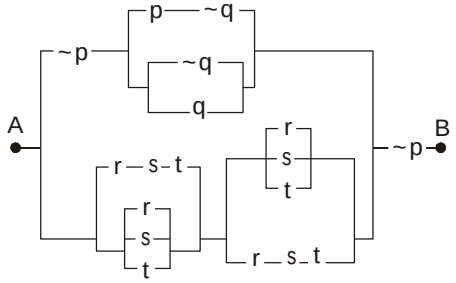
41. La proposición equivalente más simple del siguiente circuito:



Es:

a) p b) q c) r
d) p e) ~q

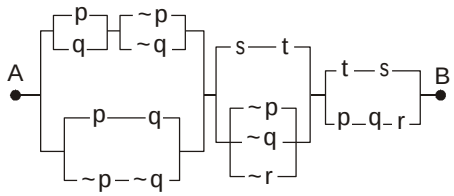
42. El circuito lógico:

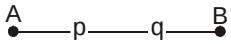


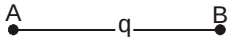
Es equivalente a:

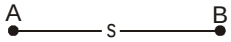
a) p b) q c) ~p
d) ~q e) $p \wedge q$

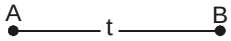
43. El circuito lógico más simple equivalente al siguiente circuito:

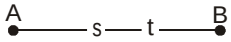


a) 

b) 

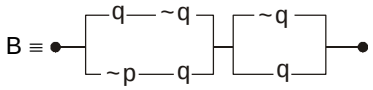
c) 

d) 

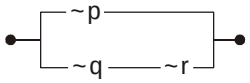
e) 

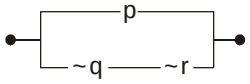
44. Si:

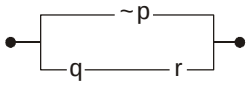
$A \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \wedge [(p \wedge t) \vee (p \wedge \sim t)]$

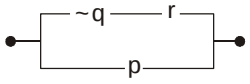


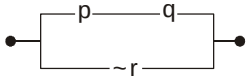
El circuito simplificado de $A \rightarrow B$ es:

a) 

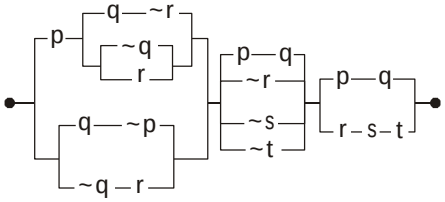
b) 

c) 

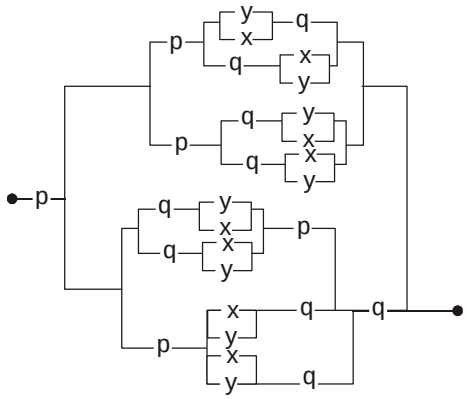
d) 

e) 

45. Si la proposición $x \vee y$ es equivalente al circuito:

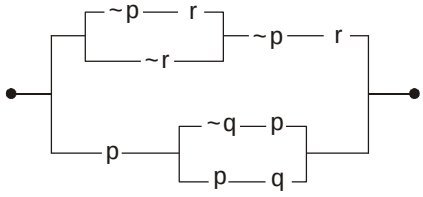


Simplificar el siguiente circuito:



a) $p \wedge q$
b) $p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t$
c) $r \wedge s$
d) $s \wedge t$
e) $p \vee q \vee r \vee s \vee t$

46. Sabiendo que la instalación de cada llave cuesta S/. 20. Cuánto se ahorraría si hacemos una instalación mínima; pero equivalente a:



a) 80 b) 100 c) 140
d) 160 e) 180

47. Para una proposición cualquiera, "p" se define:

$$F_{(p)} = \begin{cases} 1 & \text{si p es Verdadero} \\ 0 & \text{si p es Falso} \end{cases}$$

Si:

$F_{(m)} = 1$ donde $m = (p \vee r) \rightarrow s$

$F_{(n)} = 0$ donde $n = p \vee (r \rightarrow p)$

Halle:

$$F(p \wedge r) + F(r \vee s) + F(p \rightarrow s) + F(\sim p)$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 0

48. La siguiente función:

$$F_{(p)} = \begin{cases} 1\ ;\ \text{Si p es verdadera} \\ 0\ ;\ \text{Si p es falsa} \end{cases}$$

Si : $F_{(x)} = 1 \ \wedge \ F_{(y)} = 0$

Donde :

$x \equiv (p \wedge \sim r) \leftrightarrow (s \leftrightarrow w)$

$y \equiv w \vee \sim s$

Hallar:

$E = F[(s \leftrightarrow \sim w) \leftrightarrow (\sim p \vee r)] +$

$F[\sim (\sim r \rightarrow \sim p) \rightarrow (t \rightarrow (w \wedge \sim p))]$

a) 0 b) 1
c) 2 d) No se puede determinar
e) Tautología

49. Sean las proposiciones:

p: Si $N \in Z^+$, entonces:

MCD (N ; $N^2 + 1$) = 1

q: El conjunto vacío es subconjunto y elemento.

r: MCD $(\overline{ab0}_7 \ ; 7) = 7$

s: MCM (a ; b) = $a \times b \leftrightarrow$ MCD (a ; b) = 1

Además sean las proposiciones x e y:

$P_{(x;y)} \equiv x \wedge y$

$Q_{(x;y)} \equiv x \rightarrow y$

$$F_{(x)} = \begin{cases} 1\ ;\ \text{si x es verdadero} \\ 0\ ;\ \text{si x es falso} \end{cases}$$

Calcule:

$$F = F(P_{(p;q)}) + F(Q_{(q;r)}) + F(P_{(r;s)})$$

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

50. Sea la función:

f :{p/p es proposición} $\rightarrow$ {0 , 1} definido

por $f_{(p)} = \begin{cases} 1\ ,\ \text{si p es verdadero} \\ 0\ ,\ \text{si p es falso} \end{cases}$

Indicar si es verdad la siguiente igualdad:

$$f(p \rightarrow q) = 1 - f(q) \cdot f(\sim p)$$

a) Verdadero
b) Falso
c) Depende de q
d) Es contradictorio
e) Es un enunciado abierto

51. Si m y n son números reales, además se define:

$$f_{(x)} = \begin{cases} \dfrac{3m}{n} + 1\ ;\ \text{Si x es proposición verdadera} \\ \dfrac{3n}{m} - 1\ ;\ \text{Si x es proposición falsa} \end{cases}$$

Hallar:

$$M = \sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}}$$

Sabiendo que: $f_{(q)} + f_{(r)} = 21$

Siendo:

$q : 4 < 3 \leftrightarrow -1 = 0$

$r : -1 < 0 \rightarrow (-1)^2 < 0$

a) $\frac{1}{3}$ b) -3 c) $\frac{1}{7}$
d) 1 e) 3

52. Sean r, s, t, p_i , q_i donde i = 1 ; 2 ; ..... ; n proposiciones tales que $p \wedge t$ es falsa para todo i = 1 ; 2 ; ..... ; n

$s \equiv p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee .... \vee p_n$ es verdadera.

$r \equiv (p_1 \wedge t) \vee (p_2 \wedge t) \vee .... \vee (p_n \wedge t)$

$q_i \equiv p_i \vee t$ es falso para i par y es verdadera para i impar.

Hallar el valor de verdad de:

$\{(p_5 \vee t) \leftrightarrow (q_2 \wedge p_1)\} \Delta \{\sim (q_1 \wedge q_2) \vee (p_3 \wedge t)\}$

a) Verdadero.
b) Falso.
c) Faltan datos.
d) No se puede determinar.
e) Depende del valor de verdad de r.

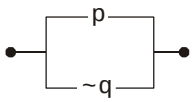
53. Sea "S" una proposición que corresponde a la siguiente tabla:

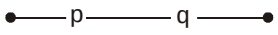
p	q	s
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

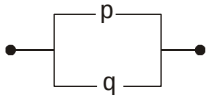
Y "r" la proposición más simplificada, equivalente a:

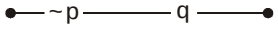
$$[(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim q] \wedge \sim q$$

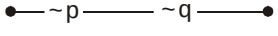
¿Cuál es el circuito más sencillo, equivalente al que resulta de conectar en paralelo los circuitos correspondientes a "~r" y a "s"?

a) 

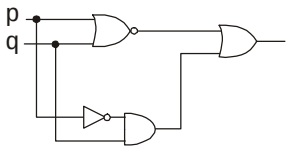
b) 

c) 

d) 

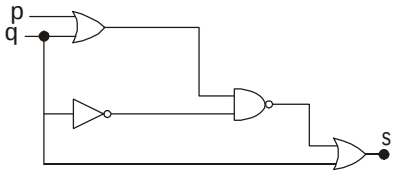
e) 

54. El equivalente de:



a) p b) ~p c) q
d) ~q e) $p \wedge q$

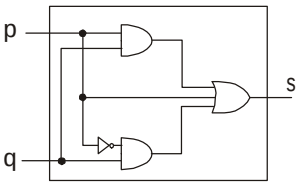
55. Dado el siguiente circuito:



Si s es falsa.
¿Cuáles son los valores de verdad de p y q respectivamente?

a) VV b) VF c) FV
d) FF e) Faltan datos

56. Los profesores de Aritmética de la academia TRILCE han diseñado un circuito integrado que recibe ***p*** y ***q*** como entradas y ***s*** como salida.

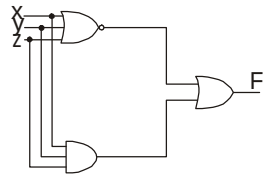


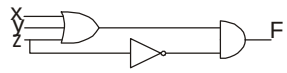
a) p b) q c) V
d) F e) $p \vee q$

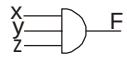
57. Diseñe el circuito que cumple con la siguiente tabla:

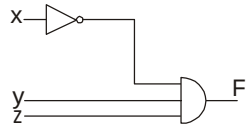
x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

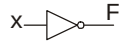
Utilice compuertas lógicas:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

58. Expresar la operación lógica F; según la tabla:

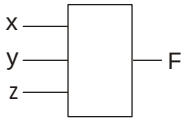
x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

a) $\bar{x}\,\bar{y}\,z + xyz$ b) (x + y)z
c) x + y + z d) $\bar{x}\,\bar{y}\,z + x\,\bar{y}\,z$
e) xyz

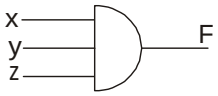
59. Dada la siguiente tabla:

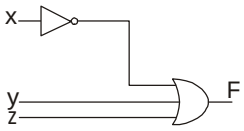
x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

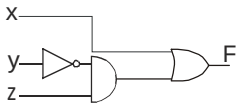
Diseñar el circuito:

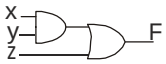


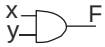
que cumple con dicha tabla utilizando las compuertas: INVERSOR, AND, OR.

a)


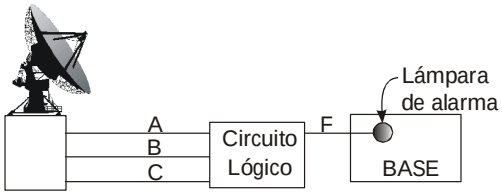
b)


c)


d)


e)


60. El circuito lógico permite detectar el estado de 3 aviones A, B, C de tal manera que la lámpara de alarma en la base se enciende cuando los tres aviones están averiados o cuando sólo el avión A está averiado.
Expresar F en función de las entradas A, B y C:
Avión sin averías: 0
Avión con averías: 1
Lámpara apagada: 0
Lámpara encendida: 1



a) $F = A(\overline{B}\,\overline{C} + BC)$
b) F = A + BC
c) F = ABC
d) F = A (B + C)
e) $F = A\overline{B}\,\overline{C}$

EL VAGO DE COZ

"En la antigua ciudad de Coz, de la que ya no queda un solo recuerdo, gobernaba un adivino muy astuto. Toda la población trabajaba salvo él, grandísimo vago, que ejercía de enlace psicoastral. Cada día obligaba a algún desdichado ciudadano a competir contra él en un extraño concurso. El aspirante debía formular al adivino una pregunta acerca de algún suceso futuro cuya respuesta debía ser simplemente "sí" o "no". En caso de que el vago acertase la respuesta, el desafortunado concursante se convertía en su esclavo y era obligado a trabajar para él de por vida. Si el adivino errase la respuesta, éste sería depuesto, convertido en asno y condenado a rebuznar durante mil años. Por desgracia para los pobladores de Coz, el vago poseía una esfera de cristal, que funcionaba mediante la magia capaz de anticipar el futuro con toda certeza. Si usted fuera el próximo rival del malvado vago. ¿Qué pregunta le haría?".

Claves

01.	a
02.	b
03.	e
04.	d
05.	a
06.	b
07.	b
08.	b
09.	b
10.	b
11.	c
12.	d
13.	d
14.	a
15.	b
16.	b
17.	e
18.	c
19.	d
20.	e
21.	c
22.	c
23.	e
24.	d
25.	d
26.	c
27.	d
28.	d
29.	c
30.	e

31.	a
32.	d
33.	b
34.	c
35.	a
36.	e
37.	a
38.	e
39.	a
40.	b
41.	c
42.	c
43.	e
44.	a
45.	b
46.	d
47.	c
48.	c
49.	c
50.	b
51.	e
52.	a
53.	c
54.	b
55.	b
56.	e
57.	a
58.	d
59.	c
60.	a

Capítulo

2 TEORÍA DE CONJUNTOS

INTRODUCCIÓN

George Ferdinand Cantor, el creador de la teoría de conjuntos, nació en 1845 en Rusia. Vivió, estudió y enseñó en Alemania donde murió en 1918.

Publicó trabajos sobre funciones de variable real y las series de Fourier, introdujo conceptos de potencia de un conjunto, conjuntos equivalentes, tipo ordinal, número transfinito; que aportaron para el inicio del estudio de los problemas del infinito y la teoría de conjuntos.

NOCIÓN DE CONJUNTO

Conjunto: Concepto primitivo que no tiene definición, pero que nos da la idea de agrupación de objetos a los cuales llamaremos elementos del conjunto.

RELACIÓN DE PERTENENCIA

Si un objeto es elemento del conjunto, se dirá que pertenece ($\in$) a su conjunto, en caso contrario se dirá que no pertenece ($\notin$) a dicho conjunto.

Ejemplo: $A = \{4; 9; 16; 25\}$

$4 \in A \qquad 10 \notin A$

$16 \in A \qquad 21 \notin A$

CARDINAL DE UN CONJUNTO

Es la cantidad de elementos de un conjunto y se denota : n(A), así en el ejemplo anterior n(A) = 4

DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO

a) Por extensión o en forma tabular: Es cuando se indican los elementos del conjunto.

$$A = \{ * ; \odot ; \# ; \ ..... ; \diamondsuit \}$$

b) Por compresión ó en forma constructiva: Es cuando se indica alguna característica particular y común a sus elementos.

$$A = \{f_{(x)} / \ x \text{ cumple alguna condición}\}$$

Diagrama de Venn - Euler:

Figuras geométricas planas cerradas que se utilizan para representar a los conjuntos, gráficamente.

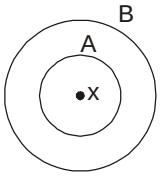
RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

Inclusión ($\subset$)

Se dice que un conjunto A está incluido en B; si todos los elementos de A, están en el conjunto B.

Es decir :

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$$



* A es subconjunto de B

* B incluye a A ($B \supset A$)

Diagrama lineal

Igualdad

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos. Es decir :

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \ \wedge \ B \subset A$$

PRINCIPALES CONJUNTOS

Conjunto Vacío: Aquel que no tiene elementos, también se le llama nulo y se denota ϕ o $\{\ \}$

Conjunto Unitario: Aquel que tiene un solo elemento, también se le llama singleton.

Conjunto Universal: Conjunto referencial que se toma como base para el estudio de otros conjuntos contenidos en él y se denota por U.

Conjunto Potencia : Es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de otro conjunto A y se denota por P(A).

Ejemplo : $A = \{2 ; 8\}$

$$P(A) = \{ \phi ; \{2\} ; \{8\} ; \{2 ; 8\}\}$$

Observación: La cantidad de subconjuntos de un conjunto A es igual a $2^{n(A)}$.

Ejemplo:

$$A = \{3 ; 5 ; 9\} \ ; \ n(A) = 3$$

Entonces hay $2^3 = 8$ subconjuntos que son :

ϕ ; {3} ; {5} ; {9} ; {3 ; 5} ; {3 ; 9} ; {5 ; 9} y {3 ; 5 ; 9}

"A todos los subconjuntos de ***A***, excepto ***A*** se les llama subconjuntos propios"

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Conjunto de los Números Naturales (N)

$$N = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; .....\}$$

Conjunto de los Números Enteros (Z)

$$Z = \{..... ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; .....\}$$

Conjunto de los Números Racionales (Q)

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} / m \in Z \ \wedge \ n \in Z \ , \ n \neq 0 \right\}$$

Conjunto de los Números Irracionales (I)

Son aquellos que tienen una representación decimal infinita no periódica y no pueden ser expresados como el cociente de 2 enteros.

Conjunto de los Números Reales (R)

Es la reunión de los racionales con los irracionales.

$$R = Q \cup I$$

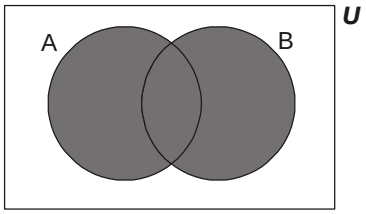
Conjunto de los Números Complejos (C)

$$C = \left\{ a + bi / a \in R \ \wedge \ b \in R \ , \ i = \sqrt{-1} \right\}$$

OPERACIONES CON CONJUNTOS

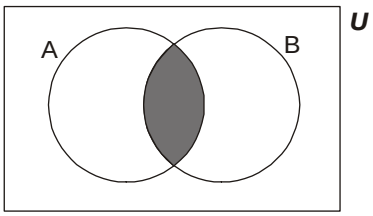
Unión $(\cup)$

$$A \cup B = \{x / x \in A \ \vee \ x \in B\}$$



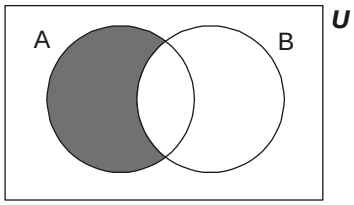
Intersección $(\cap)$

$$A \cap B = \{x / x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$



Diferencia $(-)$

$$A - B = \{x / x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$

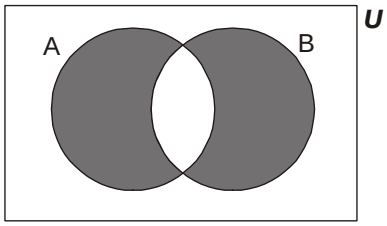


Observación:

$A - B$ también se denota : $A \setminus B$

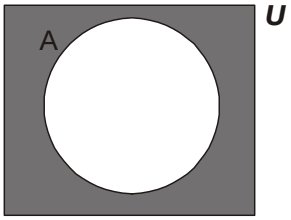
Diferencia Simétrica (Δ)

$$A \Delta B = \{x / x \in (A \cup B) \ \wedge \ x \notin (A \cap B)\}$$



Complemento (A^C , A')

$$A' = \{x / x \notin A\}$$



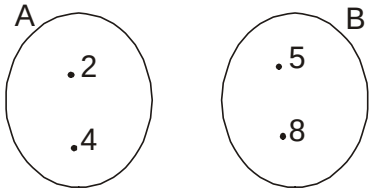
Observación : El complemento de A, se puede realizar respecto a cualquier conjunto, tal que $A \subset B$ y se denota:

$$C_B^A = B - A$$

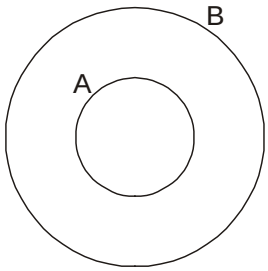
Se lee complemento de A respecto a B.

IMPORTANTE

Conjuntos Disjuntos : Cuando no tienen elementos comunes :



Conjuntos Comparables: Cuando uno de ellos está incluido en el otro.



Conjuntos Equivalentes : Cuando tienen la misma cantidad de elementos.

A es equivalente a B entonces :
$n(A) = n(B)$

Conjunto Producto: También llamado producto cartesiano.

$$A \times B = \{(a;b) / a \in A \ \wedge \ b \in B\}$$
↳ Par ordenado

Ejemplo:

$A = \{1 ; 4 ; 5\} \qquad B = \{8 ; 11\}$

$A \times B = \{(1;8) ; (1;11) ; (4;8) ; (4;11) ; (5;8) ; (5;11)\}$

ALGUNAS PROPIEDADES Y LEYES

1. Leyes distributivas Unión - Intersección:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2. Leyes de Morgan:

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

3. $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

4. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

5. $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$

6. $A - B = A \cap B'$

7. $A' - B' = B - A$

8. $n[P(A) \cap P(B)] = n[P(A \cap B)]$

9. $n[P(A) \cup P(B)] = n[P(A)] + n[P(B)] - n[P(A) \cap P(B)]$

O también:

$$n[P(A) \cup P(B)] = 2^{n(A)} + 2^{n(B)} - 2^{n(A \cap B)}$$

10. $A \cup \phi = A$

$A \cap \phi = \phi$

11. $A \cup U = U$

$A \cap U = A$

12. $(A')' = A$

13. $A \cup A' = U$

$A \cap A' = \phi$

14. $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

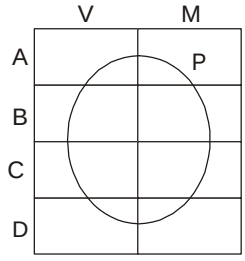
15. Ley de Absorción

* $A \cup (A \cap B) = A$
* $A \cap (A \cup B) = A$
* $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$
* $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$

GRÁFICO ESPECIAL PARA CONJUNTOS DISJUNTOS

Aplicación: En un salón de clases se observa a 60 alumnos entre varones y mujeres; con las siguientes características:

* Algunos tienen 15 años.
* 18 tienen 16 años.
* 12 tienen 17 años.
* 40 postulan este año a la Universidad.



Leyenda:

V : Conjunto de los varones.
M : Conjunto de las mujeres.
P : Conjunto de los que postulan.
A : Conjunto de los alumnos con 15 años.
B : Conjunto de los alumnos con 16 años.
C : Conjunto de los alumnos con 17 años.
D : Conjunto de los alumnos con otra edad.

NOTA: Este tipo de diagramas especiales reciben el nombre de "Diagramas de CARROLL"

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Dado el conjunto: A = {4; 3; {6}; 8} y las proposiciones:

* $\{3\} \in A$
* $\{4\} \subset A$
* $\{6\} \in A$
* $\{6\} \subset A$
* $8 \in A$
* $\phi \subset A$
* $\phi \in A$
* $\{3;8\} \subset A$

Indique el número de proposiciones verdaderas:

a) 7 b) 6 c) 5
d) 4 e) 3

02. Dados los conjuntos iguales:

$A = \{a^2 + 3\ ;\ b + 1\}$ y $B = \{13\ ;\ 19\}$

Considere a y b enteros.
Indique la suma de los valores que toma : a + b

a) 16 b) 24 c) 30
d) 12 e) 27

03. Indique la suma de los elementos del conjunto:

$$\{x^2 + 2 / x \in Z \ \wedge\ -4 < x < 4\}$$

a) 44 b) 42 c) 22
d) 18 e) 16

04. ¿Cuántos subconjuntos propios tiene el conjunto?

$$C = \{2;3;\{2\};3;2;\{2\};\{3\}\}$$

a) 127 b) 63 c) 15
d) 7 e) 31

05. Si:

n(A) = 15 ; n(B) = 32 y n(A - B) = 8

Calcule :

$$n(A \Delta B) + n(A' - B')$$

a) 36 b) 37 c) 51
d) 58 e) 59

06. ¿Cuántos subconjuntos tiene la potencia del conjunto A, tal que: A = {2; {3}; 2}?

a) 4 b) 16 c) 2^{16}
d) 8 e) 64

07. De un grupo de 30 personas, 20 van al teatro, 5 sólo van al cine, 18 van al cine o al teatro; pero no a ambos sitios.
¿Cuántos van a ambos sitios?

a) 6 b) 7 c) 8
d) 5 e) 4

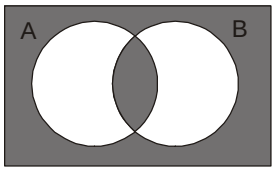
08. Sabiendo que A tiene 128 subconjuntos en total, que el número de elementos de la intersección de A y B es 5 y que B – A tiene 16 subconjuntos.
Determinar el número de subconjuntos de $A \cup B$.

a) 1024 b) 512 c) 256
d) 2048 e) 4096

09. De un grupo de 62 atletas, 25 lanzan bala, 36 lanzan jabalina y 30 lanzan disco, 3 lanzan los tres; 10 lanzan jabalina y disco, 15 disco y bala, 7 lanzan bala y jabalina.
¿Cuántos no lanzan jabalina ni disco?

a) 4 b) 6 c) 7
d) 5 e) 3

10. La operación que representa la región sombreada es:



a) $(A \cup B)' \cup (A \cap B)$
b) $[A \cap (A \cup B)] \cup (A - B)$
c) $A \cap (A \cup B)$
d) $A \cap (A \cup B)'$
e) $(A' \cap B') \cup (A \cup B)$

11. Si los conjuntos A y B son iguales, hallar $a \times b$ si a y b son naturales.

$A = \{a^2 + 2a\ ;\ b^3 - b\}$
B = {2a ; 15}

a) 8 b) 15 c) 9
d) 12 e) 6

12. Dado el conjunto:

P = {5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9}

y los conjuntos:

$M = \{x \in P / x^2 > 50 \ \wedge\ x < 9\}$
$N = \{x \in P / x \text{ es impar} \ \wedge\ 6 < x\}$
Determinar : n(M) + n(N)

a) 3 b) 4 c) 2
d) 1 e) 5

13. Jéssica tomó helados de fresa o coco durante todas las mañanas en los meses de verano (enero, febrero y marzo) del 2004.
Si tomó helados de fresa 53 mañanas y tomó helados de coco durante 49 mañanas.
¿Cuántas mañanas tomó helado de los dos sabores?

a) 9 b) 10 c) 11
d) 12 e) 15

14. En una ciudad se determinó que el 46% de la población no lee la revista A, 60% no lee la revista B y el 58% lee A ó B pero no ambas.
¿Cuántas personas hay en la población si 63000 personas leen A y B?

a) 420000 b) 840000 c) 350000
d) 700000 e) 630000

15. En una peña criolla trabajan 32 artistas. De éstos, 16 bailan, 25 cantan y 12 cantan y bailan. El número de artistas que no cantan ni bailan es:

a) 4 b) 5 c) 2
d) 1 e) 3

16. Si:
A = {1 ; 2 ; {1 ; 2} ; 3}
B = {{2 ; 1} ; {1 ; 3} ; 3}
Halle usted : $[(A-B)\cap B]\cup(B-A)$

a) {1 ; 3} b) {{1 ; 2}}
c) A d) {{1 ; 3}}
e) B

17. Dado el conjunto:
A = {1 ; {2} ; {1 ; 2}}
¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

a) $2 \notin A$ b) $\{1\} \in A$ c) $1 \subset A$
d) $\phi \in A$ e) $\{2\} \notin A$

18. Si:
$A = \{x / x = (4m-1)^2 \ , \ m \in N, 2 \le m \le 5\}$
Entonces el conjunto A escrito por extensión es:

a) {7 ; 11 ; 15 ; 19}
b) {2 ; 3 ; 4 ; 5}
c) {4 ; 9 ; 16 ; 25}
d) {49 ; 121 ; 225 ; 361}
e) {3 ; 4 ; 7 ; 9}

19. Carlos debe almorzar pollo o pescado (o ambos) en su almuerzo de cada día del mes de marzo. Si en su almuerzo durante 20 días hubo pollo y durante 25 días hubo pescado, entonces, el número de días que almorzó pollo y pescado es :

a) 18 b) 16 c) 15
d) 14 e) 13

20. En un avión hay 100 personas, de las cuales 50 no fuman y 30 no beben.
¿Cuántas personas hay que ni fuman ni beben o fuman y beben, sabiendo que hay 20 personas que solamente fuman?

a) 30 b) 20 c) 10
d) 40 e) 50

21. Si:
A = {a , b , c , b} y
$B = \{(m^2+1) \ ; \ -1 \ ; \ 5 \ ; \ (n-3) \ ; \ 2\}$

Donde : $n \wedge m \in Z^+$ y $3 < n < 8$
Además A y B son equipotentes. Hallar la suma de valores de n + m

a) 6 b) 13 c) 10
d) 14 e) 23

22. En una encuesta realizada a 190 personas sobre la preferencia de leer las revistas A y B, el resultado fue el siguiente : el número de personas que les gusta A y B es $\frac{1}{4}$ de los hombres que sólo les gusta A y la mitad de las mujeres que sólo les gusta A. El número de hombres que sólo les gusta B es $\frac{2}{3}$ del número de mujeres que sólo les gusta B. Los que leen A son 105, los que leen B son 70.
Halle el número de personas que no leen ni A ni B.

a) 30 b) 32 c) 36
d) 38 e) 40

23. Si A, B y C son tres subconjuntos de un conjunto universal de 98 elementos y además:
$n[(A \cup B) \cap C'] = 50$, n(C) = 34
Hallar : $n[(A \cup B \cup C)']$

a) 13 b) 14 c) 15
d) 16 e) 17

24. El resultado de una encuesta sobre preferencia de jugos de fruta de manzana, fresa y piña es el siguiente:
60% gustan manzana.
50% gustan fresa.
40% gustan piña.
30% gustan manzana y fresa.
20% gustan fresa y piña.
10% gustan manzana y piña.
5% gustan de los tres.
¿Que porcentaje de las personas encuestadas no gustan alguno de los jugos de frutas mencionados?

a) 5% b) 20% c) 50%
d) 12% e) 10%

25. Dados los conjuntos:
$A = \{n^2 / n \in N \ \wedge \ 0 < n < 20\}$
$B = \{2n / n \in Z \ \wedge \ 4 < n^2 < 500\}$
¿Cuántos elementos tiene $A \times B$?

a) 380 b) 400 c) 342
d) 800 e) 760

26. ¿Cuántos elementos tiene el siguiente conjunto?
(5 ; 7 ; 9 ; 11 ; .... ; 83)

a) 35 b) 40 c) 41
d) 60 e) 45

27. Sea A un conjunto con dos elementos y B un conjunto con tres elementos, el número de elementos de $P(A)\times P(B)$ es:

a) 12 b) 24 c) 48
d) 64 e) 32

28. Sea A, B y C subconjuntos de un conjunto universal U. De las afirmaciones:

I. Si $A \subset (B \cup C)$ y $A \cap C = \phi$ entonces $A \subset B$

II. Si $A \subset B$, entonces $A \cap \overline{B} = \phi$
($\overline{B}$ = complemento de B)

III. Si $A \cap B = \phi$ y $B \subset C$; entonces $A \cap C = \phi$.

IV. Si $A \cup B \cup C = U$
Entonces $A \cap B \cap C = \phi$

a) Sólo II es verdadera.
b) Sólo I, II y IV son verdaderas.
c) Sólo I es verdadera.
d) Sólo I y II son verdaderas.
e) Todas son verdaderas.

29. Decir cuál de los siguientes enunciados es falso:

a) $A \subset B \wedge B \subset A \rightarrow A = B$
b) $A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C$
c) $x \in A \wedge A \in B \rightarrow x \in B$
d) $x \in A \wedge A \subset B \rightarrow x \in B$
e) $x \in A \wedge x \in B \rightarrow x \in A \cap B$

30. Decir cuál de los siguientes enunciados es falso:

a) $A = \phi, \wedge B = \phi \rightarrow A \cap B = \phi$
b) $A = \phi, \wedge B = \phi \rightarrow A \cup B = \phi$
c) $A \cap B = \phi \rightarrow A = \phi \wedge B = \phi$
d) $A \cup B = \phi \rightarrow A = \phi \wedge B = \phi$
e) $\phi \cup A = A \quad \forall A$

31. Si:
$A = \left\{ x \in N / x^2 - 4 = 0 \wedge x \text{ es primo} \right\}$
$B = \left\{ x \in R / x^2 - 3x + 2 = 0 \right\}$
Entonces $A \cap B$ es:

a) ϕ b) $\{\phi\}$ c) {2}
d) {1} e) {-2}

32. En un aula de 25 alumnos deportistas hay : 16 alumnos que practican básquet 14 alumnos que practican fútbol, 11 alumnos que practican tenis, 6 alumnos que practican los tres deportes, 2 alumnos que practican fútbol y básquet pero no tenis, 1 alumno que practica básquet y tenis pero no fútbol, 3 alumnos que practican solo tenis.
¿Cuántos alumnos practican sólo un deporte?

a) 7 b) 5 c) 15
d) 3 e) 12

33. De un grupo de 45 cachimbos, se sabe que 14 alumnos no tienen 17 años, 20 alumnos no tienen 16 años, 8 alumnos y 3 alumnas no tienen 16 ni 17 años.
¿Cuántas alumnas tienen 16 ó 17 años?

a) 6 b) 16 c) 27
d) 12 e) 3

34. A un matrimonio asistieron 150 personas, el número de hombres es el doble del número de mujeres.
De los hombres : 23 no usan reloj pero si tienen terno, y 42 tiene reloj.
De las mujeres : las que no usan minifalda son tantas como los hombres que no usan terno ni reloj y 8 tienen minifalda y reloj.
¿Cuántas mujeres usan minifalda, pero no reloj?

a) 7 b) 6 c) 8
d) 5 e) 9

35. Las fichas de datos personales llenados por 74 estudiantes que ingresaron a San Marcos, arrojaron los siguientes resultados:
* 20 estudiantes son de Lima.
* 49 se prepararon en academia.
* 27 postularon por primera vez.
* 13 de Lima se prepararon en academia.
* 17 postularon por primera vez y se prepararon en academia.
* 7 de Lima postularon por primera vez.
* 8 de provincias que no se prepararon en academia postularon por primera vez.

Hallar respectivamente:
I. ¿Cuántos alumnos de Lima que se prepararon en academia postularon por primera vez?
II. ¿Cuántos alumnos de provincias que no se prepararon en academia postularon más de una vez?

a) 5 y 12 b) 5 y 10 c) 3 y 10
d) 4 y 10 e) 4 y 12

36. Dados los conjuntos:

$A = \left\{-3; -2; -1; \frac{1}{2}; 1; 2; 3\right\}$

$B = \{x \in A / -2 < x < 3\}$ y

$C = \left\{x \in A / 2x^2 + 3x - 2 = 0\right\}$

El resultado de $(A - C) \cap B$ es:

a) $\{-1; 1; 2; 3\}$ b) $\{-1; 1; 2\}$

c) $\{-1; 1; 3\}$ d) $\left\{-1; \frac{1}{2}; 1; 2\right\}$

e) {–1 ; 1}

37. En una escuela de 135 alumnos, 90 practican fútbol, 55 básketbol y 75 natación. Si 20 alumnos practican los tres deportes y 10 no practican ninguno, ¿cuántos alumnos practican un deporte y sólo uno?

a) 50 b) 55 c) 60
d) 70 e) 65

38. De un grupo de 100 señoritas: 10 son solamente flaquitas, 12 solamente morenas, 15 son solamente altas, además 8 tienen por lo menos 2 de estas características. ¿Cuántas señoritas del grupo no tienen ninguna de las tres características?

a) 50 b) 51 c) 55
d) Más de 60 e) Menos de 40

39. En un grupo de 100 estudiantes, 49 no llevan el curso de Sociología y 53 no siguen el curso de Filosofía. Si 27 alumnos no siguen Filosofía ni Sociología, ¿cuántos alumnos llevan exactamente uno de tales cursos?

a) 40 b) 44 c) 48
d) 52 e) 56

40. De 500 postulantes que se presentaron a las universidades Católica o Lima, 300 postularon a la Católica, igual número a la U de Lima, ingresando la mitad del total de postulantes; los no ingresantes se presentaron a la universidad Ricardo Palma, de estos, 90 no se presentaron a Católica y 130 no se presentaron a la U de Lima.
¿Cuántos postulantes ingresaron a la Católica y a la U de Lima?

a) 20 b) 30 c) 80
d) 70 e) 90

41. Sean los conjuntos no disjuntos A; B, C y D donde se sabe que el conjunto A tiene 241 elementos, el conjunto B tiene 274 elementos, el conjunto C tiene 215 elementos y el conjunto D tiene 282 elementos.
Calcular el número de elementos que tiene la intersección de los 4 conjuntos si es lo mínimo posible, además se sabe que la unión de los 4 conjuntos es 300.

a) 68 b) 79 c) 87
d) 119 e) 112

42. Dados los conjuntos:
A = {3 ; 7 ; 8}
B = {2 ; 3 ; 6 ; 9}
Se define:

$$A * B = \{a + b / a \in A \wedge b \in B\}$$

y las proposiciones:
I. En $A * B$ el elemento mayor es 17.
II. $n(A * B) = 12$
III. La suma de los elementos de $A * A$ es 72.
¿Cuáles son verdaderas?

a) Sólo I b) Sólo II c) Sólo III
d) Todas e) I y III

43. Sean los conjuntos:

$A = \{x \in N / 30 < x! < 50000\}$

$B = \{x \in N / 5 < 2^x < 300\}$

$C = \{x \in N / 20 < x^x < 4000\}$

Y las proposiciones:
I. $A \cap C = C$
II. $A \cup C = B$
III. $B \cap C = C$
IV. $A \cap B = A$
V. $A = B - C$
Indicar cuántas son correctas

a) 2 b) 3 c) 5
d) 1 e) 4

44. Dado los conjuntos:

$M = \left\{x \in R / \frac{4x - 2}{2x + 2} \leq 0\right\}$

$N = \{x \in Q / 4x - 2 \leq 0\}$

Hallar : $M \cap N$

a) $\left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$

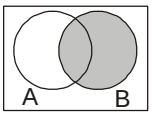
b) $\left\{x \in Q / -1 < x \leq \frac{1}{2}\right\}$

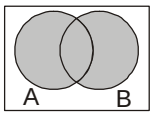
c) $\left\{x \in Q / x \leq \frac{1}{2}\right\}$

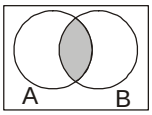
d) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

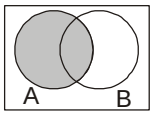
e) $\{-1; 1; 2\}$

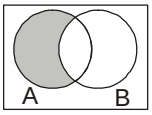
45. La diagramación correcta de la siguiente fórmula es:
$$[(A \cup B) \cap (A' \cup B)] \cup [B \cup (A \cap B)]$$

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

46. Una institución educativa necesita contratar a 25 profesores de Física y a 40 profesores de Matemática. De estos contratados, se espera que 10 realicen funciones tanto de profesor de Física como de profesor de Matemática.
¿Cuántos profesores deberá contratar la institución educativa?

a) 40 b) 50 c) 65
d) 75 e) 55

47. En un concurso de belleza, participaron 44 señoritas, de las cuales 19 eran de cabello rubio, 19 eran morenas y 22 tenían ojos verdes. También se observó que 5 eran morenas con cabello rubio, 7 eran morenas con ojos verdes y 6 tenían cabello rubio y ojos verdes. También habían dos hermanas que tenían las tres características.
¿Cuántas preguntas son necesarias realizar para conocer a dichas hermanas?

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

48. Si en un ómnibus viajan 30 pasajeros entre peruanos y extranjeros, donde hay 9 de sexo femenino extranjero, 6 niños extranjeros, 8 extranjeros de sexo masculino, 10 niños, 4 niñas extranjeras, 8 señoras y 7 señores.
¿Cuántas niñas peruanas hay en el autobús?

a) 2 b) 3 c) 4
d) 1 e) 5

49. 41 estudiantes de idiomas, que hablan inglés, francés o alemán son sometidos a un examen de verificación, en el cual se determinó que:
* 22 hablan inglés y 10 solamente inglés.
* 23 hablan francés y 8 solamente francés.
* 19 hablan alemán y 5 solamente alemán.

¿Cuántos hablan alemán, pero no inglés?

a) 9 b) 10 c) 11
d) 12 e) 13

50. De un grupo de músicos que tocan flauta, quena o tuba se sabe que la octava parte toca sólo flauta, la sétima parte toca sólo quena, la diferencia de los que tocan sólo flauta y los que tocan sólo quena es igual a la cantidad de músicos que tocan sólo tuba.
Si además 80 tocan por lo menos 2 de los instrumentos mencionados.
¿Cuántos tocan sólo quena?

a) 13 b) 14 c) 15
d) 16 e) 17

51. En un conjunto de 30 personas; 16 estudiaron en la universidad A; 11 en la universidad B y 16 en la universidad C.
Si sólo 2 personas estudiaron en las universidades A, B y C.
¿Cuántos estudiaron exactamente en una de estas universidades, considerando que todas las personas estudiaron al menos en una de dichas universidades?

a) 16 b) 17 c) 18
d) 19 e) 20

52. En una encuesta hecha en una urbanización a un grupo de amas de casa sobre el uso de tres tipos de detergente (A, B y C) se obtuvieron los siguientes datos.
Del total : Usan sólo A el 15%; A pero no B el 22%; A y C 11%; B y C 13%.
La preferencia total de A era del 38%, la de C 26% y ninguna de las marcas mencionadas, el 42%.
Se pregunta :
A. ¿Qué tanto por ciento prefieren sólo B?
B. ¿Qué porcentaje de amas de casa prefieren exactamente dos tipos de detergente respecto de las que no prefieren ninguna marca?

a) 5 y 66,66...% b) 4 y 60%
c) 8 y 26,66...% d) 5 y 73,33...%
e) 6 y 65%

53. Dados los conjuntos A y B donde :
$$A = \{x \in R / -\infty < x \leq -1\} \cup \{x \in R / 1 \leq x < +\infty\}$$
$$B = \{y \in R / 1 \leq y \leq 2\} \cup \{3\}$$
Entonces el conjunto $A \times B$ contiene:

a) Una semirecta disjunta en el tercer cuadrante.
b) Dos semirectas disjuntas en el cuarto cuadrante.
c) No contiene ninguna semirecta disjunta.
d) Contiene dos semirectas disjuntas, una en el segundo cuadrante y una en el primero.
e) Dos semirectas disjuntas, una en el primer cuadrante y otra en el tercero.

54. A, B y C son tres conjuntos tales que satisfacen las condiciones siguientes:
    1. A está contenido en B y B está contenido en C.
    2. Si x es un elemento de C entonces x también es un elemento de A.

    Decir ¿cuál de los siguientes enunciados es verdadero?

    a) B no está contenido en A.
    b) C no está contenido en B.
    c) A = B pero C no es igual a B.
    d) La intersección de A con B es el conjunto C.
    e) La reunión de A con B tiene elementos que no pertenecen a C.

55. Se lanzan dos dados juntos.
    ¿Cuántos pares ordenados se pueden formar con los números de la cara superior?

    a) 12 b) 6 c) 18
    d) 36 e) 72

56. Sean A y B dos conjuntos contenidos en un universo.
    Si : $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$
    ¿Cuál de las siguientes proposiciones es falsa?

    a) $A = A - B$ b) $B = B - A$
    c) $A \cap B \neq \phi$ d) $B \subset A'$
    e) $(A \cap B)' \supset A \cup B$

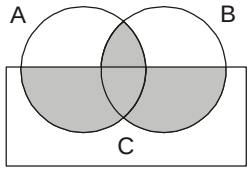
57. Para estudiar la calidad de un producto se consideran 3 defectos: A, B y C como los más importantes.
    Se analizaron 100 productos con el siguiente resultado:
    33 productos tienen el defecto A.
    37 productos tienen el defecto B.
    44 productos tienen el defecto C.
    53 productos tienen exactamente un defecto.
    7 productos tienen exactamente tres defectos.
    ¿Cuántos productos tienen exactamente dos defectos?

    a) 53 b) 43 c) 22
    d) 20 e) 47

58. ¿Cuál de estas expresiones es incorrecta?
    (A^C indica el complemento de A, A y B están contenidos en un mismo conjunto universal)

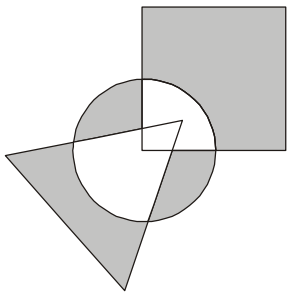
    a) $(A^C \cap B) \subset B$
    b) $(A \cup B)^C \subset (A^C \cap B^C)$
    c) $(A \cap B)^C \subset (A^C \cup B^C)$
    d) $(A \cap B) \cup (A \cap B^C) = A$
    e) $(A \cap B)^C \subset \left[(A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)\right]$

59. El círculo A contiene a las letras a, b, c, d, e, f. El círculo B contiene a las letras b, d, f, g, h. Las letras del rectángulo C que no están en A son h, j, k y las letras de C que no están en B son a, j, k.
    ¿Cuáles son las letras que están en la figura sombreada?



    a) {b ; d ; f ; g ; h} b) {a ; b , d ; f ; h}
    c) {a ; b ; g ; h ; k} d) {a ; b ; g ; f ; k}
    e) {a ; b ; d ; f}

60. El conjunto sombreado, mostrado en la figura adjunta, representa una operación entre los conjuntos:



    L = cuadrado M = círculo
    N = triángulo

    a) $(M - L \cap N) \cup (L - M)$
    b) $(M - L \cap N) \cup (N - M)$
    c) $(M - L) \cup (M - N)$
    d) $(N - M) \cup (L - M) \cup (L \cap M \cap N)$
    e) $(L - M) \cup [M - (L \cup N)] \cup (N - M)$

Claves

01.	c
02.	b
03.	c
04.	c
05.	d
06.	b
07.	b
08.	d
09.	b
10.	a
11.	e
12.	a
13.	c
14.	c
15.	e
16.	d
17.	a
18.	d
19.	d
20.	d
21.	b
22.	a
23.	b
24.	a
25.	e
26.	b
27.	e
28.	d
29.	c
30.	c

31.	c
32.	c
33.	b
34.	a
35.	b
36.	b
37.	a
38.	c
39.	c
40.	d
41.	e
42.	e
43.	b
44.	b
45.	a
46.	e
47.	d
48.	d
49.	c
50.	d
51.	d
52.	a
53.	d
54.	d
55.	d
56.	c
57.	d
58.	e
59.	b
60.	e

Capítulo

3 RAZONES Y PROPORCIONES

INTRODUCCIÓN

En nuestra vida diaria, aparecen con mucha frecuencia algunas afirmaciones como:

* Las edades de Juana y Rosa son 18 años y 16 años respectivamente.
* Tengo 2 vinos : Uno de 800 ml y el otro de 640 ml.
* El sueldo de Víctor el mes pasado fue S/. 1500 y este mes será S/. 1800

Podemos observar que las edades, los volúmenes y el dinero pueden ser medidos o contados, a los cuales se les llama ***magnitudes escalares***.

Obs: Hay magnitudes no medibles como la alegría, la memoria; por lo tanto no pueden expresarse numéricamente, por ello no las consideraremos en este texto.

CANTIDAD:

Es el resultado de la medición del estado de una magnitud escalar.

Ejemplo:

La altura del edificio Trilce Arequipa es 24 metros.

Magnitud : Longitud
Cantidad : 24 metros

Se llama magnitud a todo aquello que puede ser medido o cuantificado; además, puede definirse la igualdad y la suma de sus diversos estados.

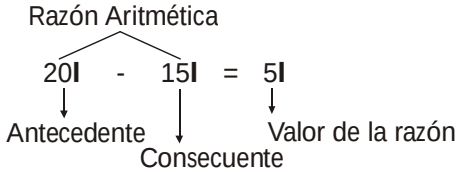
RAZÓN:

Es la comparación que existe entre dos cantidades de una magnitud, mediante las operaciones de sustracción y división.

RAZÓN ARTIMÉTICA:

Ejemplo:

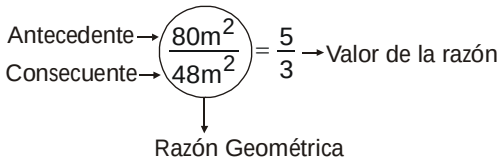
Dos toneles contienen 20 litros y 15 litros respectivamente, al comparar sus volúmenes.



RAZÓN GEOMÉTRICA:

Ejemplo:

Se comparan dos terrenos, cuyas superficies son: $80m^2$ y $48m^2$ y así obtenemos:



En conclusión:

Sean a y b dos cantidades:

	Aritmética	Geométrica
Razón	$a - b = d$	$\frac{a}{b} = k$

a : antecedente
b : consecuente
d y k : valores de las razones

PROPORCIÓN

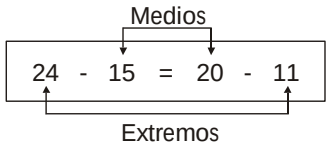
Es la igualdad de dos razones de una misma especie.

PROPORCIÓN ARITMÉTICA

Ejemplo:

Las edades de 4 hermanos son : 24 años, 20 años, 15 años y 11 años; podemos decir :

24 años – 15 años = 9 años
20 años – 11 años = 9 años
Se puede establecer la siguiente igualdad:



A la cual se le llama proporción aritmética.

PROPORCIÓN GEOMÉTRICA:

Ejemplo:

Se tiene 4 terrenos cuyas superficies son $9m^2$; $12m^2$; $15m^2$ y $20m^2$ al comprarlos se tiene:

$$\frac{9m^2}{12m^2}=\frac{3}{4} \quad \wedge \quad \frac{15m^2}{20m^2}=\frac{3}{4}$$

Se puede establecer la siguiente igualdad:

$$\boxed{\frac{9}{12}=\frac{15}{20}}$$

A la cual se le llama proporción geométrica

"9 es a 12, como 15 es a 20"

De donde:

$$\underset{\text{Extremos}}{(9)(20)} = \underset{\text{Medios}}{(12)(15)}$$

NOTA:

"Cuando los medios son diferentes, la proporción se llama discreta, pero cuando los medios son iguales se llama continua"

PROPORCIÓN ARITMÉTICA

$a - b = c - d$ $\qquad$ $a - b = b - c$

d : cuarta diferencial $\qquad$ b : media diferencial

c : tercera diferencial

PROPORCIÓN GEOMÉTRICA

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $\qquad$ $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$

d : cuarta proporcional $\qquad$ b : media proporcional

c : tercera proporcional

PROPIEDADES DE PROPORCIONES

Sea $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se cumple:

I. $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$, $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$

II. $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$, $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$

III. $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

SERIE DE RAZONES GEOMÉTRICAS EQUIVALENTES

Sean:

$$\frac{a_1}{c_1}=\frac{a_2}{c_2}=\frac{a_3}{c_3}=.....=\frac{a_n}{c_n}=k$$

De donde:

$$a_1=c_1k \;;\; a_2=c_2k \;;\ldots\ldots\ldots;\; a_n=c_nk$$

Se cumple las siguientes propiedades:

I. $$\boxed{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{c_1+c_2+\ldots+c_n}=\frac{a_1}{c_1}=\frac{a_2}{c_2}=\ldots=\frac{a_n}{c_n}=k}$$

II. $$\boxed{\frac{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}{c_1\cdot c_2\cdot\ldots\cdot c_n}=k^n}$$

III. $$\boxed{\frac{a_1^m+a_2^m+\ldots+a_n^m}{c_1^m+c_2^m+\ldots+c_n^m}=k^m}$$

Obs: Donde "n" nos indica el número de razones.

Ejemplo:

Sea la siguiente serie:

$$\frac{4}{6}=\frac{12}{18}=\frac{18}{27}=k \text{ se cumple:}$$

I. $k=\frac{4+12+18}{6+18+27}=\frac{34}{51}=\frac{2}{3}$

II. $k^3=\frac{4\cdot12\cdot18}{6\cdot18\cdot27}$ simplificando

$k^3=\frac{8}{27}\rightarrow k=\frac{2}{3}$

III. $k^5=\frac{4^5+12^5+18^5}{6^5+18^5+27^5}=\frac{2^5(2^5+6^5+9^5)}{3^5(2^5+6^5+9^5)}$

$k^5=\frac{2^5}{3^5}\rightarrow k=\frac{2}{3}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Dos números están en la relación de 2 a 5, si se añade 175 a uno y 115 al otro se hacen iguales.
¿Cuál es la diferencia entre estos números?

a) 24 b) 18 c) 30
d) 84 e) 60

02. En una reunión, hay hombres y mujeres, siendo el número de mujeres al total de personas como 7 es a 11 y la diferencia entre mujeres y hombres es 21.
¿Cuál es la razón de mujeres a hombres si se retiran 14 mujeres?

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{4}$ c) $\frac{7}{3}$
d) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{3}{2}$

03. En un salón de clase el número de varones, es al número de mujeres como 3 es a 5. Si se considera al profesor y una alumna menos, la nueva relación será $\frac{2}{3}$, hallar cuántas alumnas hay en el salón.

a) 25 b) 15 c) 20
d) 30 e) 24

04. Dos ómnibus tienen 120 pasajeros, si del ómnibus con más pasajeros se trasladan los $\frac{2}{5}$ de ellos al otro ómnibus, ambos tendrían igual número de pasajeros. ¿Cuántos pasajeros tiene cada ómnibus?

a) 110 y 10 b) 90 y 30 c) 100 y 20
d) 70 y 50 e) 80 y 40

05. Lo que cobra y gasta un profesor suman 600. Lo que gasta y lo que cobra están en relación de 2 a 3.
¿En cuánto tiene que disminuir el gasto para que dicha relación sea de 3 a 5?

a) 16 b) 24 c) 32
d) 15 e) 20

06. A – B y B – C están en relación de 1 a 5, C es siete veces A y sumando A; B y C obtenemos 100.
¿Cuánto es $(A-C)^2$?

a) 3600 b) 2500 c) 3025
d) 2304 e) 3364

07. A una fiesta, asistieron 140 personas entre hombres y mujeres. Por cada 3 mujeres hay 4 hombres. Si se retiran 20 parejas, ¿Cuál es la razón entre el número de mujeres y el número de hombres que se quedan en la fiesta?

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{5}{3}$

08. Si : $a \times b \times c = 1120$ y $\frac{2}{a} = \frac{7}{b} = \frac{10}{c}$
Hallar: a + b + c

a) 28 b) 32 c) 38
d) 19 e) 26

09. Si: $\frac{m}{2} = \frac{n}{5} = \frac{p}{8} = \frac{q}{10}$
Además : nq – mp = 306
Entonces : p + q – m – n
Es igual a :

a) 11 b) 22 c) 33
d) 44 e) 55

10. Si: $\frac{a}{3} = \frac{b}{8} = \frac{c}{12} = \frac{d}{15}$
Además : a . b + c . d = 459
Calcule: a + d

a) 27 b) 21 c) 35
d) 8 e) 32

11. Sean:
$$\frac{3}{P} = \frac{P}{E} = \frac{E}{R} = \frac{R}{U} = \frac{U}{96}$$
Calcular: E

a) 12 b) 6 c) 18
d) 24 e) 36

12. Las edades de Javier; César y Miguel son proporcionales a los números 2 ; 3 y 4.
Si dentro de 9 años sus edades serán proporcionales a 7 ; 9 y 11 respectivamente.
Hallar la edad actual de César.

a) 15 años b) 16 años c) 17 años
d) 18 años e) 19 años

13. En una reunión social, se observó en un determinado momento que el número de varones y el número de mujeres estaban en la relación de 7 a 8, mientras los que bailaban y no bailaban fueron unos tantos como otros. Si hubo en ese momento 51 mujeres que no bailaban.
¿Cuántos varones no estaban bailando?

a) 45 b) 51 c) 39
d) 26 e) 60

14. Se tiene una proporción aritmética continua, donde la suma de sus cuatro términos es 160, hallar el valor de la razón aritmética, sabiendo que los extremos son entre sí como 11 es a 5.

a) 15 b) 6 c) 8
d) 50 e) 24

15. Se tiene una proporción aritmética continua, donde la suma de sus cuatro términos es 360.
Hallar el valor de la razón aritmética, sabiendo que los extremos son entre sí como 7 es a 2.

a) 4 b) 6 c) 8
d) 50 e) 24

16. La diferencia entre el mayor y el menor término de una proporción geométrica continua es 245. Si el otro término es 42.
Hallar la suma de los términos extremos.

a) 259 b) 6 c) 8
d) 50 e) 24

17. La diferencia entre el mayor y el menor término de una proporción geométrica continua es 64, si el otro término es 24.
Hallar la suma de los términos extremos.

a) 80 b) 6 c) 8
d) 50 e) 24

18. Si 45 es la cuarta diferencial de a, b y c, además, 140 es la tercera diferencial de 2a y 160.
Hallar la media aritmética de b y c.

a) 14 b) 67,5 c) 15
d) 12,5 e) 11,5

19. La suma de los cuatro términos de una proporción geométrica es 65; cada uno de los tres últimos términos es los $\frac{2}{3}$ del precedente.
El último término es:

a) 13 b) 8 c) 9
d) 15 e) 12

20. Sabiendo que: $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$
Además:
$a-c=16$
$\sqrt{a}+\sqrt{c}=8$
Hallar: "b"

a) 2 b) 24 c) 15
d) 20 e) 64

21. La relación de las edades de 2 personas es $\frac{3}{5}$. Si hace "n" años, la relación de sus edades era como 1 es a 2 y dentro de "m" años será como 8 es a 13.
Calcular en qué relación se encuentran: n y m.

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{1}$ c) $\frac{7}{3}$
d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{8}{9}$

22. Dos cirios de igual calidad y diámetro, difieren en 12 cm de longitud. Se encienden al mismo tiempo y se observa que en un momento determinado, la longitud de uno es el cuádruplo de la del otro y media hora después, se termina el más pequeño. Si el mayor dura 4 horas, su longitud era:

a) 24 b) 28 c) 32
d) 30 e) 48

23. Se tiene dos cilindros y cada uno recibe 2 litros de aceite por minuto. Hace 3 minutos el triple del volumen del primero era el doble del segundo menos 11 litros. ¿Cuál es la diferencia entre los volúmenes si la suma de ellos en este instante es de 100 litros?

a) 23 litros b) 22 litros c) 25 litros
c) 21 litros e) 24 litros

24. En un corral, se observa que por cada 2 gallinas hay 3 patos y por cada 5 gansos hay 2 patos. Si se aumentaran 33 gallinas la cantidad de éstas sería igual a la cantidad de gansos, calcular cuántos patos hay en el corral.

a) 15 b) 13 c) 12
d) 16 e) 18

25. Si: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$
Además: $(a+b)(c+d)(e+f)=8^{16}$
Hallar: $\sqrt[3]{a\cdot c\cdot e}+\sqrt[3]{b\cdot d\cdot f}$

a) 2^{12} b) 16 c) 2^{16}
d) 2^{20} e) 2^4

26. Si: $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}$ y $\frac{a^3+b^3+c^3}{m^3+n^3+p^3}=125$
Calcule: $E=\frac{a^2m+b^2n+c^2p}{m^3+n^3+p^3}$

a) 23 b) 24 c) 25
d) 28 e) 32

27. Si se sabe que: $\frac{p}{h}=\frac{q}{\ell}=\frac{r}{m}=\frac{s}{n}$ y
$(p + q + r + s)(h + \ell + m + n) = 6724$
Calcular el valor numérico de la expresión.
$$I=\frac{1}{2}\left(\sqrt{ph}++\sqrt{q\ell}+\sqrt{sn}+\sqrt{mr}\right)$$

a) 82 b) 164 c) 41
d) 80 e) 40

28. Si : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{1}{K}$
Además : $\frac{a+1}{b+2}=\frac{c+3}{d+6}$
El valor de K es :

a) 2 b) 4 c) 6
d) 3 e) 5

29. Un cilindro contiene 5 galones de aceite más que otro. La razón del número de galones del uno al otro es $\frac{8}{7}$. ¿Cuántos galones de aceite hay en cada uno?

a) 28 : 33 b) 42 : 47 c) 35 : 40
d) 21 : 26 e) 56 : 61

30. Sea:
$$\frac{A}{x}=\frac{B}{y}=\frac{C}{z}=k$$
Si:
$$\frac{A^2}{x^2}+\frac{B^2}{y^2}+\frac{C^2}{z^2}+\sqrt{\frac{A^2+B^2+C^2}{x^2+y^2+z^2}}=14$$
Hallar "k"

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

31. Si: $\frac{ab}{8}=\frac{ac}{15}=\frac{bc}{10}=K$
Entonces, la suma de los menores valores naturales de a, b , c y K es:

a) 30 b) 35 c) 37
d) 45 e) 47

32. La razón de una proporción geométrica es un entero positivo, los términos extremos son iguales y la suma de los términos de la proporción es 192.
Hallar el menor término medio.

a) 9 b) 3 c) 147
d) 21 e) 63

33. Hallar 3 números enteros que suman 35, tales que el primero es al segundo como el segundo es al tercero. Dar como respuesta el producto de los tres números enteros.

a) 500 b) 1000 c) 1500
d) 2000 e) 2500

34. Si: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y $(a - b)(c - d) = 36$
Hallar: $E=\sqrt{ac}-\sqrt{bd}$

a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 12

35. El número de vagones que llevan un tren A es los $\frac{5}{11}$ del que lleva un tren B; el que lleva un tren C, los $\frac{7}{13}$ de otro D. Entre A y B llevan tantos vagones como los otros dos. Si el número de vagones de cada tren no puede pasar de 60, ¿Cuál es el número de vagones que lleva el tren C?

a) 26 b) 14 c) 39
d) 52 e) 28

36. El número de vagones que lleva un tren A es los $\frac{5}{11}$ del que lleva un tren B; y, el que lleva un tren C, los $\frac{9}{23}$ de otro D.
Entre A y B llevan tantos vagones como los otros dos. ¿Cuál es el número de vagones de cada tren, sabiendo que no puede pasar de 25?

a) 10 ; 22 ; 9 ; 23
b) 8 ; 21 ; 9 ; 20
c) 11 ; 23 ; 9 ; 25
d) 10 ; 21 ; 12 ; 19
e) 13 ; 22 ; 10 ; 25

37. En una serie de razones geométricas equivalentes se tiene que : el primer y tercer antecedente son 18 y 33, y el segundo consecuente es 8.
Si el producto de los 3 términos restantes es 1584, hallar el segundo antecedente.

a) 30 b) 18 c) 24
d) 36 e) 48

38. La suma de los cuatro términos de una proporción geométrica continua es a la diferencia de sus extremos como 3 es a 1.
¿Cuál es la razón geométrica del extremo mayor y el extremo menor?

a) $\frac{3}{1}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{4}{1}$
d) $\frac{2}{1}$ e) $\frac{5}{3}$

39. Un niño demora en subir una cuesta 1 hora y media. A un adulto, le es la mitad menos dificultoso subir y bajar que al niño. Si al adulto le tomó $\frac{1}{2}$ hora bajar, manteniéndose constante la relación de tiempo de subida y bajada, ¿Cuál será la suma de tiempo de bajada del niño y subida del adulto?

a) $\frac{1}{2}$h b) 1 h c) $\frac{7}{4}$h
d) $\frac{3}{4}$h e) $\frac{3}{2}$h

40. En una proporción geométrica la suma de los extremos es 29 y la suma de los cubos de los 4 términos de dicha proporción es 23814.
Hallar la suma del mayor extremo y el mayor medio de esta proporción si la suma de sus términos es 54.

a) 25 b) 30 c) 35
d) 40 e) 45

41. Hallar el producto de los términos de una razón geométrica que cumpla: si sumamos "n" al antecedente y consecuente de dicha razón se forma otra razón cuyo valor es la raíz cuadrada de la razón inicial.

a) n b) n^2 c) $\sqrt{n}$
d) $\sqrt[3]{n}$ e) 1

42. La razón de 2 números enteros queda elevada al cuadrado cuando a sus términos se les disminuye 3 unidades.
Indique la diferencia de los términos de dicha razón.

a) 4 b) 8 c) 12
d) 9 e) 7

43. Dos móviles parten en el mismo instante. El primero del punto A y el segundo del punto B y marchan el uno hacia el otro con movimiento uniforme sobre la recta AB. Cuando se encuentran en M, el primero ha recorrido 30m más que el segundo. Cada uno de ellos, prosigue su camino. El primero tarda 4 minutos en recorrer la parte MB y el segundo tarda 9 minutos en recorrer MA. Hallar la distancia AB.

a) 100 m b) 150 m c) 200 m
d) 300 m e) 320 m

44. En una serie de cuatro razones geométricas las diferencias de los términos de cada razón son 6, 9, 15 y 21 respectivamente y la suma de los cuadrados de los antecedentes es 1392.
Hallar la suma de los dos primeros consecuentes si la constante de proporcionalidad es menor que uno.

a) 30 b) 40 c) 35
d) 70 e) 66

45. Se tiene una serie de razones continuas equivalentes, donde cada consecuente es el doble de su antecedente, además la suma de sus extremos es 260.
Indica el mayor término.

a) 246 b) 256 c) 140
d) 128 e) 220

46. Pepe y Luchín son encuestadores y entablan la siguiente conversación:
Pepe: Por cada 5 personas adultas que encuestaba, 3 eran varones; y por cada 5 niños, 3 eran mujeres adultas.

Luchín: Pero yo encuestaba 2 varones adultos por cada 3 mujeres adultas; y 4 mujeres adultas por cada 5 niños.

Pepe: Aunque parece mentira, encuestamos igual número de personas. Además, mi cantidad de mujeres es a mi cantidad de varones como 87 es 88.

Luchín: Y en la relación de 12 a 13 en mi caso.

Pepe: ¡Oye!, te das cuenta que yo entrevisté 90 mujeres adultas menos que tú.

Según esta charla, calcule:
a = cantidad de niños varones.
b = cantidad de varones adultos que entrevistó Luchín.
c = cantidad de personas adultas que entrevista Pepe.

Dé como respuesta: "a + b − c"

a) 20 b) 55 c) 42
d) 36 e) 10

47. Si: $\frac{m}{b+c-a} = \frac{n}{c+a-b} = \frac{p}{a+b-c} = \frac{3}{2}$
Determinar: $E = \frac{m(n+p)+n(m+p)+p(m+n)}{am+bn+cp}$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 6

48. Al restar 4 unidades a cada uno de los términos de una razón geométrica, se obtiene el doble del cuadrado de dicha razón. Indique la razón aritmética de los términos de la razón geométrica inicial.

a) 18 b) 19 c) 20
d) 21 e) 22

49. En una proporción geométrica continua cuyo producto de sus términos es 65536; se cumple que la media aritmética de los antecedentes es igual a $\frac{9}{16}$ de la media armónica de los consecuentes.
Hallar la diferencia de los extremos.

a) 8 b) 12 c) 24
d) 32 e) 40

50. En una proporción geométrica continua donde los términos extremos son 2 cuadrados perfectos consecutivos, se cumple que la suma de las diferencias de los términos de cada razón está comprendida entre 11 y 31. Calcular la suma de todos los valores que puede tomar la media proporcional.

a) 1120 b) 5160 c) 9920
d) 9348 e) 1050

51. En una proporción, cuya constante es mayor que la unidad, la suma de los antecedentes es 45 y la diferencia de los consecuentes es 20.
Calcule el menor de los términos considerando que todos los términos son enteros.

a) 5 b) 8 c) 3
d) 6 e) 7

52. Cuatro recipientes cúbicos, cuyas aristas son proporcionales a los cuatro primeros números primos están ordenados en forma creciente. Contienen agua, de tal manera que las alturas de lo que les falta llenar son proporcionales a los primeros números naturales, estando el primero hasta el 50% de su capacidad. Si vaciamos el contenido del cuarto recipiente, en los otros 3 sobraría $\overline{aba}$ litros menos de lo que faltaría para llenarlo si vaciáramos el contenido de los 3 en éste.
Calcule el contenido del cuarto recipiente.

a) 1764 l b) 1323 l c) 1647 l
d) 3067 l e) 1552 l

53. El producto de los términos de una proporción continua es 38416. Si la diferencia de los antecedentes es la mitad de la diferencia de los consecuentes, determinar la diferencia entre la suma de las terceras proporcionales y la media proporcional.

a) 13 b) 16 c) 31
d) 21 e) 11

54. Si : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y $a+b=2(c+d)$, siendo el valor de la constante de proporcionalidad igual a $\frac{1}{c}$; y la suma de los cuatro términos de la proporción 60.
Hallar el valor de la media aritmética de los extremos.

a) 9 b) 22 c) 12
d) 32 e) 40

55. En una proporción aritmética continua, cuyos términos son enteros y mayores que 2, se convierten en geométrica del mismo tipo cuando a sus términos medios se les disminuye 2 unidades. Calcule el mayor de los términos si todos son los menores posibles.

a) 12 b) 14 c) 16
d) 18 e) 10

56. En un polígono regular de "n" vértices numerados del 1 al "n" hay tres personas "A"; "B" y "C" parados en el vértice 1.
En un momento dado, ellos comienzan a caminar por los lados. "A" camina en el sentido de la numeración de los vértices $(1 \to 2 \to 3 \to ...)$, "B" y "C" lo hacen en sentido contrario, "A" se cruza con "B" por primera vez en un vértice y con "C" dos vértices más adelante. Se sabe que "A" camina el doble de rápido que "B" y éste el doble de rápido que "C".
¿Cuántos vértices tiene el polígono?

a) 10 b) 12 c) 14
d) 15 e) 18

57. Tres números enteros, cuya suma es 1587, son proporcionales a los factoriales de sendos números consecutivos.
Hallar el mayor de éstos números, si la constante de proporcionalidad es entera.

a) 506 b) 1012 c) 768
d) 1518 e) 1536

58. En una serie continua de "p" razones geométricas, el producto de los términos posee 33 divisores que poseen raíz p - ésima. Calcular la media proporcional de los extremos, si todos los términos y la constante son enteros y mínimos.

a) 2^{16} b) 1024 c) 243
d) 2^{48} e) 96

59. Un cirio tiene doble diámetro del diámetro de otro. Estos cirios, que son de igual calidad y de igual longitud se encienden al mismo tiempo y al cabo de una hora difieren en 24 cm. Transcurrida media hora más, la longitud de uno es el triple de la longitud del otro.
¿Qué tiempo dura el cirio más grueso?

a) 8h 30' b) 8h 15' c) 8h
d) 7h 30' e) 7h 15'

60. Se tiene la siguiente serie:

$$\frac{a_1}{1!\,2^2}=\frac{a_2}{2!\,3^2}=\frac{a_3}{3!\,4^2}=.....=\frac{a_{23}}{23!\,24^2}$$

Se sabe además que:

$$a_1+a_2+a_3+.....+a_{18}=25(20!-2)$$

Calcular el mayor antecedente:

a) 25!24 b) 24!25 c) 27!28
d) 20!22 e) 21!23

Claves

01.	e
02.	b
03.	a
04.	c
05.	b
06.	a
07.	a
08.	c
09.	c
10.	a
11.	a
12.	d
13.	c
14.	a
15.	d
16.	a
17.	a
18.	b
19.	b
20.	c
21.	b
22.	c
23.	b
24.	e
25.	c
26.	c
27.	c
28.	a
29.	c
30.	b

31.	e
32.	b
33.	b
34.	c
35.	e
36.	a
37.	c
38.	c
39.	c
40.	e
41.	b
42.	b
43.	b
44.	c
45.	b
46.	b
47.	c
48.	d
49.	c
50.	e
51.	b
52.	b
53.	d
54.	c
55.	c
56.	d
57.	d
58.	e
59.	b
60.	a

Capítulo

4 PROMEDIOS

INTRODUCCIÓN

El ***promedio aritmético*** es una medida de tendencia central, que tiene importancia en el caso en que los datos se junten aditivamente para obtener un total. De hecho, puede interpretarse como un valor que podría sustituir a cada uno de los datos para obtener la misma suma total.

El ***promedio geométrico*** por su parte, es relevante cuando los datos se usan multiplicativamente para obtener un resultado. Es así que puede interpretarse como un valor, que puede sustituir a cada dato, para producir el mismo producto total.

El ***promedio armónico*** tiene importancia cuando usamos los datos sumando los recíprocos de cada uno de los datos y se puede interpretar con un valor que puede sustituir a cada dato para producir la misma suma de los recíprocos.

PROMEDIO

Dado un conjunto de datos diferentes es frecuente calcular un valor representativo de ellos, que este comprendido entre el menor y el mayor de ellos; a dicha cantidad se le llama: promedio o valor medio o simplemente media de los datos. Sean "n" cantidades en sucesión monótona creciente:

$$a_1 \; ; \; a_2 \; ; \; a_3 \; ; \; .... \; ; \; a_n$$

El promedio de ellas será "p" si:

$$a_1 < p < a_n$$

PROMEDIOS MÁS UTILIZADOS

1. *Promedio Aritmético o Media Aritmética (M. A.)*

$$M.A. = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$$

Aplicación:

Un vendedor independiente ganó en el Verano pasado: Enero S/. 800; Febrero S/. 1200 y Marzo S/. 1300. ¿Cuál fue su promedio mensual?

Resolución:

El promedio mensual viene a ser la Media Aritmética (M. A.) de dichas cantidades.

$$M.A. = \frac{S/.800 + S/.1200 + S/.1300}{3} = S/.1100$$

2. *Promedio Geométrico o Media Geométrica (M.G.)*

$$M.G. = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ..... \cdot a_n}$$

Aplicación:

En los últimos 5 meses, el gobierno actual registró una tasa de inflación mensual de 2%, 5%, 20%, 20% y 25%. Encuentre la tasa de inflación mensual promedio durante ese tiempo.

Resolución:

El promedio de dichas tasas viene a ser la media geométrica (M. G.) de dichas tasas.

$$MG = \sqrt[5]{2\% \times 5\% \times 20\% \times 20\% \times 25\%}$$

$$MG = 10\%$$

3. *Promedio Armónico o Media Armónica (M.H.)*

$$M.H. = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}}$$

Aplicación:

Un ama de casa gasta S/. 30, cada mes, durante 3 meses consecutivos, en la compra de aceite. El primer mes compró a S/. 10 el galón, el segundo mes lo compró a S/. 6 el galón y el tercer mes lo compró a S/. 3 el galón; diga entonces ¿cuál fue el costo promedio mensual?

Resolución:

$$\text{Costo Promedio} = \frac{\text{Costo Total}}{\#\text{ galones}}$$

Entonces el costo promedio es:

$$\frac{S/.30 + S/.30 + S/.30}{\frac{S/.30}{S/.10} + \frac{S/.30}{S/.6} + \frac{S/.30}{S/.3}} = \frac{S/.90}{18} = S/.5$$

Podemos observar que el costo promedio es la media armónica de S/.10 , S/.6 y S/.3 es decir:

$$M.H. = \frac{3}{\frac{1}{10} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = 5$$

PARA DOS CANTIDADES a y b

$$M.A. = \frac{a+b}{2} \qquad M.G. = \sqrt{a \cdot b}$$

$$M.H. = \frac{2ab}{a+b}$$

PROPIEDADES

1. Para "n" cantidades se cumple:

$$M.A. \geq M.G. \geq M.H.$$

2. Para dos cantidades a y b se cumple:

$$M.A.(a,b) \cdot M.H.(a,b) = \left[M.G.(a,b)\right]^2$$

3. El error que se comete al tomar la media aritmética (M.A.), como media geométrica (M.G.) para dos números es:

$$M.A. - M.G. = \frac{(a-b)^2}{4(M.A. + M.G.)}$$

PROMEDIO PONDERADO (P. P.)

Es un caso particular del promedio aritmético, donde una o más cantidades se repiten dos o más veces.

Aplicación:

Al final del semestre académico, un alumno de la Universidad observa su récord de notas:

Curso	*Nº de créditos*	*Nota*
Matemática I	6	12
Química I	4	14
Física I	3	15
Economía	2	13

Determine su promedio.

Resolución:

El número de créditos indica las veces que se repite cada nota. Entonces el promedio ponderado es:

$$P.P = \frac{6 \cdot 12 + 4 \cdot 14 + 3 \cdot 15 + 2 \cdot 13}{6 + 4 + 3 + 2} = 13,2\hat{6}$$

En general:

Datos: a_1 ; a_2 ; a_3 ; ... ; a_n

Pesos: p_1 ; p_2 ; p_3 ; ... ; p_n

El Promedio Ponderado (P.P.) es:

$$P.P. = \frac{a_1p_1 + a_2p_2 + ... + a_np_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}$$

NOTA: Cuando no nos mencionen qué tipo de promedio se ha tomado y sólo se diga promedio de ....., consideraremos al Promedio Aritmético.

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. ¿Cuál es el valor medio entre 0,10 y 0,20?

a) 0,09 b) 0,21 c) 0,11
d) 0,15 e) 0,18

02. De un grupo de 6 personas, ninguna de ellas es menor de 15 años. Si el promedio aritmético de las edades es 18 años.
¿Cuál es la máxima edad que puede tener una de ellas?

a) 33 b) 32 c) 34
d) 35 e) 31

03. Hallar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones
I. El promedio aritmético de 12 ; 24 ; 16 y 40 es 23.
II. Si el promedio geométrico de 4 números naturales no consecutivos, y diferentes entre sí es $3\sqrt[4]{2}$; entonces la razón aritmética entre el mayor y menor número es 8.
III. Si la MG y MH de dos números es 150 y 90, entonces la MA es 250.

a) VFV b) VVV c) FVV
d) VFF e) FFV

04. Si el promedio de tres números consecutivos es impar, entonces el primer número debe ser:

a) Múltiplo de 3.
b) Impar.
c) Par.
d) Primo absoluto.
e) Cuadrado perfecto.

05. La media aritmética de 100 números es 24,5. Si cada uno de ellos se multiplica por 3,2, la media aritmética será:

a) 88,8 b) 70 c) 78,4
d) 21,3 e) 20

06. Para 2 números a y b tales que : a = 9b, se cumple que: MG (a;b) = k . MH (a;b)
Calcular el valor de "k"

a) 1,888... b) 2,999... c) 1,777...
d) 2,333... e) 1,666...

07. El promedio de 20 números es 40. Si agregamos 5 números, cuyo promedio es 20, ¿Cuál es el promedio final?

a) 42 b) 20 c) 40
d) 30 e) 36

08. Si luego de dar un examen en una aula de 60 alumnos, se sabe que el promedio de notas de 15 de ellos es 16 y el promedio de notas del resto es 12.
Hallar el promedio de notas de los 60 alumnos.

a) 14 b) 13 c) 12
d) 15 e) 16

09. ¿Cuál es el ahorro promedio diario de 15 obreros, si 5 lo hacen a razón de 10 soles por persona y el resto 5 soles cada uno?
(en soles)

a) $\frac{5}{2}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{20}{3}$
d) $\frac{3}{20}$ e) 2

10. En un salón de clases de 20 alumnos, la nota promedio en Matemática es 14; en el mismo curso la nota promedio para otra aula de 30 alumnos es 11.
¿Cuál será la nota promedio, si se juntan a los 50 alumnos?

a) 12,5 b) 12,2 c) 12
d) 13 e) 13,2

11. Indique cuáles son verdaderos o falsos :
I. El promedio de - 10; 12; -8; 11 y - 5 es cero.
II. Sólo se cumple para 2 cantidades : $MG^2 = MA \cdot MH$
III. Si se cumple que para 2 cantidades que su MA = 2,5 y su MH = 6,4; entonces, su MG = 4.

a) VFV b) VFF c) VVF
d) FVF e) VVV

12. Un trailer debe llevar una mercadería de una ciudad "A" a otra ciudad "B", para lo cual el trailer utiliza 10 llantas para recorrer los 780 Km que separa dichas ciudades. El trailer utiliza también sus llantas de repuesto, con lo cual cada llanta recorre en promedio 600 Km.
¿Cuántas llantas de repuesto tiene?

a) 8 b) 10 c) 3
d) 4 e) 6

13. El promedio aritmético de 53 números es 600; si se retiran los números 150; 120 y otro; el promedio aumenta en 27,9.
Calcular el otro número.

a) 128 b) 135 c) 137
d) 141 e) 147

14. Un automóvil cubre la distancia entre las ciudades A y B a 70 Km por hora. Luego, retorna a 30 Km por hora. ¿Cuál es la velocidad media de su recorrido?

a) Falta el dato de la distancia entre A y B.
b) 42 Km por hora.
c) 50 Km por hora.
d) 45 Km por hora.
e) 40 Km por hora.

15. La ciudad de Villa Rica de 100 casas, tiene un promedio de 5 habitantes por cada casa y la ciudad de Bellavista, de 300 casas, tiene un promedio de 1 habitante por casa.
¿Cuál es el promedio de habitantes por casa para ambas ciudades?

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

16. La edad actual de Félix es el doble de la de Pedro. Hace 4 años, la diferencia de sus edades era el promedio de sus edades actuales disminuido en 5 años.
Hallar la edad, en años, de Félix.

a) 10 b) 12 c) 14
d) 16 e) 20

17. De 500 alumnos de un colegio, cuya estatura promedio es de 1,67 m; 150 son mujeres. Si la estatura promedio o media aritmética de las mujeres es 1,60, calcular la estatura promedio de los varones de dicho grupo.

a) 1,70 m b) 1.64 m c) 1,71 m
d) 1,69 m e) 1,68 m

18. Juan ha comprado 2,500 cuadernos. 1,000 valen 3 soles cada uno y las restantes valen 2 soles cada uno. El precio promedio, en soles, por cuadernos es:

a) 2,50 b) 2,70 c) 2,30
d) 2,40 e) 2,60

19. Si el promedio de 10 números de entre los 50 (cincuenta) primeros enteros positivos es 27,5.
El promedio de los 40 enteros positivos restantes es:

a) 20 b) 22 c) 23
d) 24 e) 25

20. El promedio de dos números es 3. Si se duplica el primer número y se quintuplica el segundo número, el nuevo promedio es 9.
Los números originales están en la razón:

a) 3 : 1 b) 3 : 2 c) 4 : 3
d) 5 : 2 e) 2 : 1

21. El promedio geométrico de 5 números es 2^{12} y el promedio geométrico de 3 de ellos es 2^6.
¿Cuál será el promedio geométrico de los otros 2?

a) 2^6 b) 2^4 c) 2^{64}
d) 2^{42} e) 2^{21}

22. La media aritmética de $\overline{ab}$ y $\overline{ba}$ es 66, si se cumple $a^2 + b^2 = 90$.
Hallar la media geométrica de "a" y "b"

a) $3\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{6}$
d) $3\sqrt{7}$ e) $\sqrt{29}$

23. El promedio de 5 números es x. Si el promedio de dos de ellos es $\frac{x}{2}$, ¿Cuál es el promedio de los otros tres?

a) $\frac{4x}{3}$ b) $\frac{x}{3}$ c) $\frac{3x}{4}$
d) $\frac{(x-3)}{4}$ e) $\frac{(x-4)}{3}$

24. El promedio de 50 números es 38 siendo 38 y 62 dos de los números. Eliminando estos números el promedio de los restantes es:

a) 36,5 b) 38 c) 37,2
d) 38 e) 37,5

25. En una oficina trabajan 12 personas cuyo promedio de edades es 26 años. Si el número de hombres es 8 y su edad promedio es 28 años.
¿Cuál es la edad promedio de la edad de las mujeres?

a) 27 b) 26 c) 25
d) 24 e) 22

26. Si la media geométrica de dos números es 14 y su media armónica $11\frac{1}{5}$, halla los números.
Dar la suma de cifras del mayor.

a) 3 b) 10 c) 13
d) 5 e) 6

27. Un estudiante TRILCE sale a correr todos los días en un circuito de forma cuadrada con las siguientes velocidades; 4 m/s; 6 m/s; 10 m/s y V m/s. Si la velocidad promedio es $\frac{48}{7}$. Halle: V

a) 12 b) 20 c) 15
d) 18 e) 24

28. Si la media aritmética de los "n" primeros números naturales (1 , 2 , 3 , ... , n) es a.
¿Cuál es la media aritmética de:
$(a+1, a+2, a+3, ... a+n)$?

a) n + 1 b) $\frac{n+1}{4}$ c) $\frac{a+n}{2}$
d) $\frac{n+1}{2}a$ e) n - 1

29. La MG de tres números enteros es $5\sqrt[3]{18}$. Si la MA de dos de ellos es 12,5.
Hallar la MA de los tres números.

a) 15,1 b) 12,3 c) 11,6
d) 14,2 e) 13,3

30. Si la media aritmética y la media geométrica de dos números enteros positivos x e y son enteros consecutivos, entonces el valor absoluto de $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ es:

a) $\sqrt{2}$ b) 2 c) 1
d) $3\sqrt{2}$ e) $\sqrt{3}$

31. La media aritmética de 15 impares de 2 cifras es 35 y de otros 20 impares, también de 2 cifras, es 52.
Hallar la media aritmética de los impares de 2 cifras no considerados.

a) 71 b) 81 c) 91
d) 46 e) 54

32. La media aritmética de los términos de una proporción geométrica continua es a la razón aritmética de sus extremos como 3 a 4.
Calcular la suma de las 2 razones geométricas que se pueden obtener con los extremos de dicha proporción.

a) 6,25 b) 5 c) 4,25
d) 3,75 e) 2,75

33. Tres números enteros a, b y c, tienen una media aritmética de 5 y una media geométrica de $\sqrt[3]{120}$.
Además, se sabe que el producto bc = 30.
La media armónica de estos números es:

a) $\frac{320}{73}$ b) $\frac{350}{75}$ c) $\frac{360}{74}$
d) $\frac{75}{350}$ e) $\frac{73}{360}$

34. El promedio armónico de las edades de 8 hermanos es 30.
Ninguno de ellos es menor de 28 años.
¿Cuál es la máxima edad que podría tener uno de ellos?

a) 30 años b) 40 años c) 60 años
d) 90 años e) 50 años

35. La $\overline{MA}$ de 19 números consecutivos es 15 y la $\overline{MA}$ de otros 12 números impares consecutivos es 38.
Si la $\overline{MA}$ del menor y mayor de estos 31 números es de la forma : $\overline{ab,c}$
Hallar: a + b + c

a) 10 b) 12 c) 14
d) 16 e) 20

36. En una pista circular, un automóvil se desplaza a velocidades de:
2; 6; 12; 20; ... ; 380 Km/h.
La velocidad promedio del automóvil es:

a) $\frac{18}{19^2}$ b) 19 c) 20
d) $\frac{21^2}{20}$ e) $\frac{20}{21^2}$

37. Al calcular la M.A. de todos los números de dos cifras PESI con 5, se comete un error de dos unidades por no considerar a los números M y N (ambos impares).
¿Cuántas parejas M y N existen?

a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8

38. Determinar el promedio armónico de los números de la siguiente sucesión:
40; 88; 154; 238; .... ; 1804; 2068

a) 215 b) 220 c) 240
d) 235 e) 245

39. Si para dos números a y b (a > b) que son enteros positivos:
$MA^{MG} = 3125^6$
Determinar la media armónica.

a) 7 b) 8 c) 9
d) 10 e) 11

40. Sean a y b dos números enteros pares, si el producto de la MA con su MH es igual a cuatro veces su MG, entonces el menor valor que toma uno de dichos números es:

a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

41. Un auto viaja de la siguiente manera: recorre 200 Km a 30 Km/h; luego, 100 Km a 40 Km/h y finalmente, 300 Km a 60 Km/h.
¿Cuál es la velocidad media de todo su recorrido?

a) $42\frac{6}{17}$ b) $51\frac{2}{17}$ c) $52\frac{3}{19}$
d) $55\frac{2}{19}$ e) $47\frac{2}{19}$

42. En el Dpto. de Matemáticas de la UNI, trabajan matemáticos, ingenieros mecánicos e ingenieros civiles. "La suma de las edades de todos ellos es 2880 y la edad promedio es 36 años". Las edades promedios de los matemáticos, mecánicos y civiles son respectivamente : 30, 34 y 39 años. Si cada matemático tuviera 2 años más; cada mecánico, 6 años más y cada civil, 3 años más, entonces la edad promedio aumentaría en 4 años.
Hallar el número de matemáticos, que trabajan en el Dpto. de Matemáticas.

a) 40 b) 10 c) 30
d) 20 e) 15

43. ¿Cuántos pares de números enteros diferentes cumplen que el producto de su media aritmética, media geométrica y la media armónica es 250047?

a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 7

44. La media armónica de un grupo de números consecutivos es 24. A cada uno de estos números se les multiplica por su siguiente consecutivo y nuevamente se calcula su promedio armónico y se obtiene 28.
Halle la media armónica de los consecutivos a cada uno de los números del primer grupo.

a) 52 b) 62 c) 162
d) 168 e) 74

45. Calcule la media aritmética de las siguientes cantidades:

$$1;4;12;32;....;\frac{n\cdot 2^n}{2}$$

a) $\frac{2^n(n-2)+1}{3}$ b) $\frac{2^n(n-1)+1}{n}$
c) $\frac{2n(n-2)+1}{n}$ d) $\frac{2^n+1}{n+1}$
e) $\frac{2^n(n+1)-1}{n}$

46. A excede a B en $\overline{2n}$ unidades. Los promedios aritmético y geométrico de A y B son números impares consecutivos.
Calcule B.

a) 25 b) 49 c) 32
d) 18 e) 28

47. Se tiene 100 números, donde el promedio aritmético de 40 de ellos es p y el promedio aritmético de los otros 60 números es q. Si la media geométrica y la media armónica de p y q son $10\sqrt{2}$ y $\frac{40}{3}$ respectivamente.
¿Cuál es el mayor valor que puede tomar el promedio aritmético de los 100 números?

a) 14 b) 16 c) 18
d) 24 e) 17

48. Calcular el promedio geométrico de:
1 ; 6 ; 27 ; 108 ; 405 ; ... ("n" términos)
(Considere : 1 . 2 . 3 . ... K = K!)

a) $3^{\frac{n-1}{2}}\cdot\sqrt[n+1]{n!}$ b) $3^n\cdot\sqrt[n]{n!}$
c) $2^{\frac{n+1}{2}}\cdot\left(\sqrt[n]{n!}\right)^{-1}$ d) $3^{\frac{n-1}{2}}\cdot\sqrt[n]{n!}$
e) $3^{\frac{n+1}{2}}\cdot\sqrt[n]{(n+1)!}$

49. La M.H. de un grupo de números consecutivos es "a", a cada uno de estos números se le multiplica por su siguiente consecutivo y nuevamente se calcula en M.H. y se obtiene "b".
Hallar la M.H. de los consecutivos de cada uno de los números del grupo mencionado.

a) $\frac{a\cdot b}{a+b}$ b) $\frac{a-b}{a\cdot b}$ c) $\frac{a+b}{a\cdot b}$
d) $\frac{a\cdot b}{b-a}$ e) $\frac{2ab}{a+b}$

50. Sabiendo que 2 números diferentes cumplen con la siguiente condición:

$$\left(\sqrt{MA}\right)^{MG}=3125^4$$

Hallar la diferencia de los números.

a) 20 b) 40 c) 35
d) 30 e) 25

51. Calcular el mayor promedio de:
1.2 ; 1.2.3 ; 2.3.4 ; 3.4 ; 3.4.5 ; ... ; n(n+1) ; n(n+1)(n+2)

a) $\frac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)}$

b) $\frac{(n+1)(n+2)}{3}$

c) $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{8}$

d) $\frac{(n+1)(n+2)(3n+13)}{24}$

e) $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{(n+4)}$

52. Hallar el promedio de todos los numerales capicúas de 3 cifras cuyas bases son menores que 10.

a) 247,5 b) 240 c) 324
d) 120 e) 200

53. Entre los enteros positivos que son menores que J. ¿Cuál es el mayor?

$$J = \frac{\sqrt{56}}{15} + \frac{\sqrt{72}}{17} + \frac{\sqrt{90}}{19} + ... + \frac{\sqrt{2756}}{105}$$

a) 18 b) 17 c) 29
d) 23 e) 22

54. Una balanza, mal construida, a pesar de tener los brazos algo desiguales, se encuentra en equilibrio cuando se halla descargada. Se pesa un cuerpo en el platillo derecho y arroja un peso de "a" gramos y cuando se pesa el mismo cuerpo en el platillo izquierdo acusa un peso de "b" gramos.
Calcular el verdadero peso del cuerpo.
M.A. = Media Aritmética.
M. G. = Media Geométrica.
M. H. = Media Armónica.

a) MA (a y b)
b) MH (a y b)
c) MG (a y b)
d) $\frac{1}{2}MG^2$ (a y b)
e) $\frac{1}{2}MH$ (a y b)

55. Las medias aritmética, geométrica y armónica de dos enteros positivos cumplen que:

$$MA^{\left(\frac{2}{MG}\right)^{-1}} = 256^{\sqrt{15}}$$

Calcular la diferencia entre los números.

a) 6 b) 7 c) 8
d) 9 e) 10

56. Una hormiga recorre los "n" lados de un polígono, una sola vez cada lado, con velocidades de 2 , 14 , 35 , 65, 104 , 152 , ... y 527 centímetros por cada minuto, respectivamente.
Si calculamos la velocidad promedio, considerando que es un polígono regular, el resultado será "p" cm/min.
En cambio, si consideramos que cada lado lo recorre en el mismo tiempo, el resultado será "q" cm/min.
Si: n + p + q = MA(a ; b) $\times$ MH (a ; b)
Calcule la suma de los valores de "a + b", si son enteros positivos.

a) 448 b) 906 c) 360
d) 418 e) 936

57. Sean a, b y c enteros positivos. Si las medias geométricas de ab, ac y bc son directamente proporcionales a los números 3, 4 y 5 respectivamente.
Encontrar el valor de la constante de proporcionalidad que hace que los números a, b y c sean los menores posibles.

a) 1 b) 20 c) 120
d) 60 e) 180

58. Hallar la media armónica de la siguiente serie: 1; 2; 4; 8; .... ; ("n" términos)
Dar como respuesta la suma del numerador y denominador de la fracción resultante.

a) 2^n b) $2^n - 1$
c) $2^n(n+1)$ d) $2^n(n+1) - 1$
e) $2^{n-1}(n+2) - 1$

59. Para 2 números se cumple:

$$\frac{1}{4}\left[\frac{1}{MA} + \frac{1}{MG}\right] = (MA + MG)^{-1}$$

Hallar:

$$G = \frac{(MA + MG)^2}{8(MA \cdot MG)}$$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{2}{5}$ e) 1

60. La media armónica de 3 números es:
[10; 1; 2; 2] su media geométrica es igual a uno de ellos que es múltiplo de 5. Al considerar un cuarto número la media armónica es [12; 2].
Hallar la media geométrica de los 4 números.

a) $2\sqrt{15}$ b) $3\sqrt{15}$ c) $4\sqrt{15}$
d) $5\sqrt{15}$ e) $6\sqrt{15}$

Claves

01.	d
02.	a
03.	b
04.	c
05.	c
06.	e
07.	e
08.	b
09.	c
10.	b
11.	b
12.	c
13.	b
14.	b
15.	b
16.	e
17.	a
18.	d
19.	e
20.	e
21.	e
22.	b
23.	a
24.	e
25.	e
26.	b
27.	c
28.	a
29.	e
30.	a

31.	c
32.	c
33.	c
34.	c
35.	c
36.	c
37.	e
38.	d
39.	c
40.	a
41.	a
42.	b
43.	e
44.	d
45.	b
46.	a
47.	b
48.	d
49.	d
50.	d
51.	d
52.	c
53.	e
54.	c
55.	c
56.	a
57.	d
58.	e
59.	a
60.	d

Capítulo

5 REGLA DE MEZCLA Y ALEACIÓN

INTRODUCCIÓN

Sabía Ud. que la atmósfera es una mezcla de gases que rodea un objeto celeste (como la Tierra) cuando éste cuenta con un campo gravitatorio suficiente para impedir que escape. La atmósfera terrestre está constituida principalmente por Nitrógeno (78%) y Oxígeno (21%). El 1% restante lo forman el Argón (0,9%), el Dióxido de Carbono (0,03%), distintas proporciones de vapor de agua, y trazas de Hidrógeno, Ozono, Metano, Monóxido de Carbono, Helio, Neón, Kriptón y Xenón.
También existen otros tipos de mezcla, la que realizan los comerciantes con la finalidad de obtener utilidades, la forma de calcular el precio común a ellos será motivo de estudio en el presente capítulo.

MEZCLA: Es la reunión o agregación de 2 o más ingredientes o sustancias entre las cuales no hay interacción química.

Precio Unitario: Es el costo de cada unidad de medida del ingrediente.

Precio Medio: Es el precio de costo de una unidad de medida de mezcla. Se obtiene dividiendo el costo total de los ingredientes entre la cantidad total de unidades de medida de mezcla.

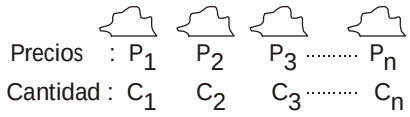
$$P_m = \frac{\text{Costo Total}}{\text{Cantidad Total}}$$

Ejemplo:
Se mezclan a tipos de arroz, según la siguiente relación :
Arroz tipo A : 9 Kg de S/. 3
Arroz tipo B : 5 Kg. de S/. 2,2
Arroz tipo C : 6 Kg. de S/. 1,5
Calcule el precio medio de la mezcla.

Resolución:
El precio medio es el precio de costo de un Kg. de mezcla, que se obtiene dividiendo el costo total de los ingredientes entre la cantidad de mezcla obtenida.

$$P_m = \frac{9 \times S/.3 + 5 \times S/.2,2 + 6 \times S/.1,5}{9 + 5 + 6} = S/.2,35$$

Se puede observar que el precio medio es el promedio ponderado de los precios unitarios.
En general, para "n" ingredientes:



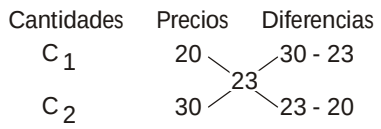
$$P_m = \frac{C_1P_1 + C_2P_2 + C_3P_3 + ... + C_nP_n}{C_1 + C_2 + C_3 + ... + C_n}$$

REGLA DEL ASPA

Se utiliza para determinar la proporción en la que deben mezclarse los ingredientes para obtener un determinado precio medio.

Ejemplo:
¿En qué relación se debe mezclar café de S/. 20 el kg. con café de S/. 30 el kg. para obtener café de S/. 23?

Resolución:



Se cumple:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{30 - 23}{23 - 20} \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{7}{3}$$

Se deben mezclar en la relación de 7 a 3.

PROPIEDAD

Cuando los precios de los ingredientes son diferentes se cumple que:

$$\boxed{\text{Precio Menor} < \text{Precio Medio} < \text{Precio Mayor}}$$

Observación : Como el precio medio es el precio de costo; lo que se gana en algunos ingredientes, se pierde en los otros.

$$\boxed{\text{Ganancia Aparente} = \text{Pérdida Aparente}}$$

MEZCLA ALCOHÓLICA

Es una mezcla de alcohol y agua.

* ***Grado de una Mezcla Alcohólica:*** Es el tanto por ciento de alcohol puro presente en la mezcla. Se obtiene utilizando la siguiente expresión :

$$\boxed{\text{Grado} = \frac{\text{Vol. Alcohol}}{\text{Vol. Total}} \times 100\%}$$

También se puede expresar en grados.

ALEACIÓN

Es la mezcla de metales mediante la fundición:

METAL FINO:
Son metales como el oro; plata y platino.

METAL ORDINARIO:
Son los metales no preciosos, como el cobre, zinc, etc.

LEY DE UNA ALEACIÓN:
Es la relación que existe entre el peso del metal precioso o fino y el peso total de la aleación. Indica qué fracción de la mezcla es de metal fino.

$$\boxed{\text{Ley} = \frac{\text{Peso de metal fino}}{\text{Peso total de la Aleación}}}$$

Ejemplo:

Se tiene una aleación constituida por 40 g. de plata y 10 g. de zinc.
¿Cuál es la ley de la aleación?

Resolución:

10 g.	Zinc
40 g.	Plata

Peso Total : 50 g.

$$\text{Ley} = \frac{\text{Peso de Plata}}{\text{Peso Total}}$$

$$\text{Ley} = \frac{40}{50} = 0{,}800$$

LIGA DE UNA ALEACIÓN:

Si se quiere dar la relación del metal ordinario y peso total se utiliza la siguiente expresión:

$$\boxed{\text{Liga} = \frac{\text{Peso de metal ordinario}}{\text{Peso Total}}}$$

Se cumple:

$$\boxed{\text{Ley} + \text{Liga} = 1}$$

NÚMERO DE KILATES DE UNA ALEACIÓN

Es de común uso el número de kilates para indicar qué parte de la aleación es de oro puro. Para lograr esto, se considera que el oro puro es de 24 kilates se cumple:

$$\boxed{\frac{\text{Nº de kilates}}{24} = \frac{\text{Peso de metal fino}}{\text{Peso Total}}}$$

También:

$$\boxed{\text{Nº de kilates} = 24 \times \text{Ley}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Se mezcla 12 litros de pisco de S/. 8 el litro con 10 litros de S/. 7,5 y 8 litros de S/. 5.
¿A cómo se deberá vender para ganar el 10% del costo?

a) S/. 6,90 b) S/.7,00
c) S/. 7,37 d) S/. 7,10
e) S/. 7,73

02. Se ha mezclado 200 litros de vino a 5 soles el litro con 30 litros de vino de precio mayor, obteniéndose una mezcla con un precio medio de 6,50 soles el litro.
¿Cuál es el costo, en soles por litro del mencionado vino de mayor precio?

a) S/. 15 b) S/. 16 c) S/. 16,50
d) S/. 18 e) S/.20

03. Se mezclan dos tipos de arroz de S/. 2,60 y S/. 1,40 el Kg.; si el precio medio es S/. 2,20 el Kg.
Hallar cuántos kilos de arroz se tiene en total sabiendo que la diferencia de peso entre las 2 cantidades de arroz es 30 kilos.

a) 100 b) 80 c) 120
d) 60 e) 90

04. Se mezcla 50 Kg de un ingrediente de S/. 2,50 el Kg con 60 Kg. de un segundo ingrediente de S/. 3,20 el Kg. y con 40 Kg. de un tercer ingrediente de S/. 1,90, el Kg.
¿A cómo se deberá vender cada kilogramo de la mezcla para ganar en cada kilogramo el 50% de la misma?

a) S/. 3,60 b) S/. 3,93 c) S/. 4,10
d) S/. 3,82 e) S/. 4,25

05. ¿Cuál es la pureza de una mezcla alcohólica que contiene 24 litros de alcohol puro y 8 litros de agua?

a) 65º b) 59º c) 70º
d) 75º e) 80º

06. Se quiere obtener 100 litros de alcohol de 74%, mezclando 30 litros de alcohol a 80% con cantidad de alcohol puro y agua.
¿Qué cantidad de alcohol se usa?

a) 20ℓ b) 30ℓ c) 40ℓ
d) 50ℓ e) 60ℓ

07. Un comerciante ha comprado 350 litros de aguardiente a S/. 1,35 el litro.
¿Qué cantidad de agua habrá de añadir para vender el litro a S/. 1,75 y ganar el 30%?

a) $\frac{1}{2}$ litro de agua.
b) 1 litro de agua.
c) 2 litros de agua.
d) $1\left(\frac{1}{2}\right)$ litros de agua.
e) $\frac{1}{4}$ litro de agua.

08. Una mezcla de vino y agua, equivalente a 2000 litros, contiene 90% de vino.
¿Qué cantidad de agua habrá que añadirle a la mezcla para que el 75% sea vino?

a) 150ℓ b) 200ℓ c) 400ℓ
d) 350ℓ e) 600ℓ

09. Se tiene 3 lingotes de plata y cobre : uno de ley 0,600; otro de 0,950 y otro de 0,850. Se quiere obtener otro lingote de ley 0,750 tomando 125 gramos del 2do y que pesa 750 gramos.
¿Qué cantidad se necesitará del tercer lingote?

a) 225 gr b) 350 gr c) 275 gr
d) 252 gr e) 125 gr

10. Se tiene 56 gramos de oro de 15 kilates. ¿Cuánto gramos de oro puro se le debe agregar para que se convierta en una aleación de oro de 20 kilates?

a) 35 gr b) 50 gr c) 70 gr
d) 75 gr e) 60 gr

11. Si se funde 50 gramos de oro con 450 gramos de una aleación, la ley de la aleación aumenta en 0,02.
¿Cuál es la ley de la aleación primitiva?

a) 0,900 b) 0,850 c) 0,800
d) 0,750 e) 0,950

12. Se ha fundido un lingote de plata de 1200 gr. y 0,85 de ley con otro de 2000 gr. de 0,920 de ley
¿Cuál es la ley de la aleación obtenida?

a) 0,980 b) 0,893 c) 0,775
d) 0,820 e) 0,920

13. Un anillo de 33 gramos de peso está hecho de oro de 17 kilates.
¿Cuántos gramos de oro puro se deberá agregar, al fundirlo, para obtener oro de 21 kilates?

a) 13,2 b) 4 c) 22
d) 44 e) 40

14. Se ha agregado 30 gramos de oro puro a una aleación de oro de 18 kilates que pesa 30 gramos.
¿Qué ley de oro se obtendrá expresada en kilates?

a) 23 kilates b) 21 kilates
c) 22 kilates d) 19 kilates
e) 20,6 kilates

15. Un comerciante compró 24 Kg. de té de una clase y 36 Kg. de otra por 15444 soles; el de la segunda clase costó 1584 soles más que el de la primera. Mezcló toda la cantidad y vendió el kilogramo de la mezcla con una ganancia de 42,60 soles.
¿A qué precio vendió el kilogramo?

a) S/. 300 b) S/. 350 c) S/. 320
d) S/. 310 e) S/. 280

16. En un muro mixto de sillería, mampostería y ladrillo han entrado 30, 150 y 180m^3 de estas tres clases de fábrica, que se pagaron a 1920, 300 y 660 soles, respectivamente, el metro cúbico.
¿Cuál es el precio del metro de este muro?

a) S/. 595 b) S/. 605 c) S/. 615
d) S/. 600 e) S/. 625

17. Dos clases diferentes de vino se han mezclado en los depósitos A y B. En el depósito A, la mezcla está en proporción de 2 a 3, respectivamente y en el depósito B, la proporción de la mezcla es de 1 a 5.
¿Qué cantidad de vino debe extraerse de cada depósito para formar una mezcla que contenga 7 litros de vino de la primera clase y 21 litros de la otra clase?

a) 12 y 16 b) 13 y 15 c) 10 y 19
d) 15 y 13 e) 18 y 10

18. Una corona de 60 gramos es de 18 kilates, se quiere venderla ganando 25%.
¿Cuál debe ser el precio de venta?, si el gramo de oro puro está S/. 24 y el gramo del metal ordinario utilizado cuesta S/. 0.80

a) S/. 720 b) S/. 1092 c) S/. 993
d) S/. 1365 e) S/. 1425

19. Se mezclan 70 litros de alcohol de 93º con 50 litros de 69º. A la mezcla se le extrae 42 litros y se le reemplaza por alcohol de grado desconocido, resultando una mezcla que contiene 26,7 litros de agua.
Hallar el grado desconocido.

a) 60º b) 63º c) 68º
d) 70º e) 72º

20. Se han mezclado 50 litros de alcohol de 96º de pureza, con 52 litros de alcohol de 60º de pureza y 48 litros de otro alcohol.
¿Cuál es la pureza de este último alcohol, si los 150 litros de la mezcla tiene 80% de pureza?

a) 92º b) 85º c) 84º
d) 78º e) 72º

21. Se tiene 2 lingotes de oro. El primero contiene 200 g. de oro puro y 100 g. de cobre, el segundo contiene 210g. de oro puro y cierta cantidad de cobre.
Hallar dicha cantidad sabiendo que si deseara tomar cierta cantidad de cada uno de ellos para formar 30g. de una aleación de oro de 18 kilates, del segundo lingote se debe tomar 12 gramos.

a) 20 g b) 30 g c) 10 g
d) 25 g e) 40 g

22. Un joyero tiene 2 lingotes: el 1ro, contiene 270 gr. de oro y 30 gr. de cobre; el 2do. contiene 200 gr. de oro y 50 gr. de cobre.
¿Cuántos gramos de cada uno se debe fundir para fabricar una medalla de oro de 0,825 con un peso de 24 gramos?

a) 8 gr. del 1ro. b) 10 gr. del 1ro.
c) 16 gr. del 2do. d) 18 gr. del 2do.
e) 14 gr. del 1ro.

23. Un joyero tiene 3 barras de plata de ley 0,830; 0,780 y 0,650. Funde las dos primeras en la relación de 1 a 4 y con el lingote resultante y la tercera obtiene una nueva aleación de 0,690.
¿Qué peso de la primera hay en el lingote final, si éste pesa 1,75 Kg.?

a) 100 gr. b) 250 gr. c) 300 gr.
d) 400 gr. e) 0,5 Kg.

24. Un metalurgista funde un adorno de plata de ley 0,95 con otro adorno de cobre de 5 Kg obteniendo una aleación de ley 0,90 con lo cual desea fabricar monedas de 20 gramos de peso. ¿Cuántas monedas obtendrá?

a) 3500 b) 3750 c) 4250
d) 4500 e) 4750

25. ¿Qué peso de estaño puro se debe fundir con una aleación de 30 partes de estaño y 70 partes de cobre, para obtener una de $\frac{3}{5}$ de estaño y $\frac{2}{5}$ de cobre que pesa 2,8 gramos?

a) 1,2 gr b) 1,6 gr c) 1,8 gr
d) 2,5 gr e) 1 g

26. Un litro de una mezcla formada por 75% de alcohol y 25% de agua, pesa 960 gramos. Sabiendo que el litro de agua pesa 1 Kg. se pide el peso del litro de una mezcla conteniendo 48% de alcohol y 52% de agua.

a) 825,5 gr b) 762,4 gr c) 974,4 gr
d) 729,5 gr e) 817,6 gr

27. Se tienen dos depósitos, cada uno con 50 litros de alcohol. Se intercambian 10 litros, en uno el grado aumenta en 4 y en el otro disminuye en 4.
¿Cuáles son los grados al inicio, si los nuevos grados están en la relación de 16 a 19?

a) 64º y 60º b) 64º y 70º
c) 64º y 76º d) 60º y 80º
e) 60º y 70º

28. Un comerciante mezcla "a" litros de vino de S/. 12 el litro con "b" litros de vino de S/. 18 el litro y obtiene vino de S/. 13. Si invierte los volúmenes iniciales de vino, hallar el precio de venta de 1 litro de la nueva mezcla si quiere ganar el 20%.

a) S/. 20,4 b) S/. 19,6 c) S/. 18,8
d) S/. 21,6 e) S/. 19,2

29. Se mezclan dos tipos de café en la relación de 2 es a 5 y se vende ganando el 20%. Luego, se hace una nueva mezcla, pero en la relación de 5 es a 2 y se vende ganando el 25% resultando que ambos precios de venta son iguales.
Hallar uno de los precios unitarios, sabiendo que es un número entero y el otro es de S/. 11.

a) S/. 8 b) S/. 10 c) S/. 9
d) S/. 12 e) S/. 13

30. Un panadero tiene 2 clases de harina, una de S/. 4,5 el Kg y la otra de S/. 2,0 el Kg Mezcla estas harinas, observando que los cuadrados de sus cantidades están en la misma relación que sus precios unitarios. 100 Kg de la harina obtenida producen 137,5 Kg de "wawa". Calcular el costo de dicha harina para producir 385 Kg de "wawa"

a) S/. 875 b) S/. 840 c) S/. 770
d) S/. 910 e) S/. 980

31. Un comerciante tiene vino de 6 soles el litro. Le agrega una cierta cantidad de agua y obtiene una mezcla de 60 litros que la vende en 351 soles. Si en esta venta gana el 30% del costo, indicar qué porcentaje del total de la mezcla es agua.

a) 20% b) 10% c) 25%
d) 30% e) 75%

32. Un comerciante quiere mezclar tres tipos de vino de S/. 2,50; S/. 3,00 y S/. 3,60 el litro, respectivamente. ¿Cuánto habrá que utilizar del primer tipo si se desea obtener una mezcla de 240 litros que pueda vender a S/. 3,75 el litro ganando en ello el 20% y además, si los volúmenes de los dos primeros tipos están en la relación de 3 a 4?

a) 60 L b) 75 L c) 90 L
d) 45 L e) 54 L

33. Se mezclan 2 tipos de azúcar A y B cuyas cantidades están en la relación de 3 a 2, y con el precio de 4 Kg. de A se puede comprar 5 Kg. de B. Si el precio medio es 1,38. Calcular el precio medio al mezclar iguales cantidades de cada tipo de azúcar.

a) S/. 2,35 b) S/. 2,40 c) S/. 1,35
d) S/. 1,50 e) S/. 1,80

34. Se tiene dos recipientes de 40 y "m" litros de calidades diferentes. Se extraen 24 litros de cada uno y lo que se saca de uno se hecha al otro y viceversa, quedando, entonces, ahora ambos recipientes de igual calidad.
¿Cuál es el valor de "m"?

a) 45 b) 50 c) 60
d) 64 e) 72

35. Se realiza la siguiente mezcla : 1 Kg de una sustancia de 3 soles el Kg más 1 Kg de una sustancia de 6 soles el Kg más 1 Kg de una sustancia de 9 soles el Kg y así sucesivamente. ¿Cuántos Kg serán necesarios mezclar para obtener una mezcla cuyo precio sea 39 soles?

a) 13 b) 26 c) 29
d) 25 e) 30

36. Por uno de los grifos de un baño sale el agua a la temperatura de 16º y por el otro a 64º.
¿Qué cantidad de agua debe salir por cada grifo para tener 288 litros a 26º de temperatura?

a) 228 y 60 litros b) 210 y 78 litros
c) 218 y 70 litros d) 200 y 88 litros
e) 205 y 83 litros

37. Se ha mezclado 144 kilogramos de café a S/. 7,50 el kilogramo con cierta cantidad de café a S/. 8,90 el kilogramo, y se ha vendido el kilogramo de la mezcla a S/. 9,20.
Díga qué cantidad de la segunda clase se ha tomado, sabiendo que se ha obtenido un beneficio del 15% sobre el precio de costo.

a) 82 Kg b) 80 Kg c) 75 Kg
d) 90 Kg e) 85 Kg

38. Con un género de dos calidades distintas, cuyos precios son 5 y 8 soles el kilogramo, se ha obtenido una mezcla de 150 Kg. y se ha vendido con un aumento en el precio medio del kilogramo, de 0,34 soles, lo que supone una ganancia de 5%.
¿Cuántos kilogramos de una de las dos calidades han entrado en la mezcla?

a) 50 Kg b) 70 Kg c) 30 Kg
d) 40 Kg e) 90 Kg

39. Se tienen 200 centímetros cúbicos de agua salada cuyo peso es 210 gramos.
¿Cuántos centímetros cúbicos de agua pura habrá que agregar para obtener una mezcla que pese 102 gramos por cada 100 centímetros cúbicos?

a) 300 b) 210 c) 200
d) 320 e) 600

40. En una barrica de 228 litros queda 147 litros de vino. Se ha adicionado agua de tal modo que una botella llena de 0,8 litros de ésta mezcla contiene $\frac{7}{10}$ de vino puro.
¿Cuál es la cantidad de agua adicionada?

a) 60ℓ b) 64ℓ c) 65ℓ
d) 63ℓ e) 70ℓ

41. Se tienen 2 lingotes de plata y cobre; el primero tiene un peso de plata igual a $\frac{3}{7}$ del peso fino que contiene el segundo y su ley es de 570 milésimo.
Calcular la ley del segundo lingote sabiendo que la fundición de ambos da otra aleación de 13656,25 gramos de peso y 640 milésimos de ley.

a) 0,572 b) 0,624 c) 0,675
d) 0,484 e) 0,545

42. Se tiene dos aleaciones : la 1era. contiene 80% de plata, 10% de cobre y 10% de cinc; la 2da. contiene 60% de plata, 25% de cobre y 15% de cinc.
Se les funde en la proporción de 2 a 3 y la aleación resultante se funde con plata pura en tal proporción de la ley resulta 0,744.
¿Qué porcentaje de cobre contiene esta aleación?

a) 17,8% b) 15,2% c) 25%
d) 12,5% e) 16,4%

43. Se tiene tres lingotes de plata cuyas leyes son: 0,75 ; 0,80 y 0,85.
Si se funde el primero con el segundo, se obtiene una aleación de ley 0,78 y si se funde el primero con el tercero se obtiene como ley de la aleación también 0,78.
¿Cuál es el peso del tercer lingote si la suma de los pesos de los tres lingotes es 1,23 Kg.?

a) 180 gr b) 420 gr c) 630 gr
d) 560 gr e) 450 gr

44. Se tienen 2 cadenas de 14 kilates y 18 kilates. Se funden para confeccionar 6 sortijas de 8 gramos cada una.
Determine el número de kilates de cada sortija, si la cantidad de cobre de la primera cadena y la cantidad de oro de la segunda cadena están en la relación de 5 a 27.

a) 16 K b) 20 K c) 19 K
d) 17 K e) 22 K

45. Se tiene un recipiente "A" con alcohol de 80% de pureza y otro recipiente "B" con alcohol de 60% de pureza.
Si mezclamos la mitad de "A" con la quinta de "B", obtenemos 60 litros de alcohol de 75% de pureza. Si mezcláramos todo "A" y todo "B", ¿Cuál sería el porcentaje de pureza de la mezcla resultante?

a) 70% b) 72,5% c) 75%
d) 67,5% e) 70,9%

46. A 40 litros de una mezcla alcohólica al 30%, se le agrega "x" litros de agua para reducir su pureza a su tercera parte; luego, se quiere vender la mezcla obtenida ganando el $33,\widehat{3}\,\%$, por cada litro (el costo de cada litro de alcohol puro es S/. 90).
Calcular "x" y el precio de venta de cada litro.

a) 60ℓ y S/. 61 b) 80ℓ y S/. 12
c) 70ℓ y S/. 31 d) 80ℓ y S/. 21
e) 60ℓ y S/. 51

47. Se tiene un recipiente lleno de alcohol puro. Se extrae la tercera parte y se reemplaza con agua; luego, se extrae la cuarta parte y se reemplaza con agua.
¿Cuántos litros de la nueva mezcla se debe tomar, tal que al mezclarlos con 55 litros de agua y 25 litros de alcohol puro se obtenga alcohol de 35º?

a) 12 L b) 20 L c) 30 L
d) 40 L e) 80 L

48. Un tendero compró 150 Kg. de café a 6 soles el Kg. y lo mezcla con 90 Kg. de una calidad superior que le había costado 8 soles el Kg. El café, por efecto del tueste perdió la $\frac{1}{6}$ parte de su peso. Diga qué cantidad de café tostado entregará por 891 soles sabiendo que quiere ganar el 10% del importe de la compra.

a) 100Kg b) 80 Kg c) 200 Kg
d) 50 Kg e) 90 Kg

49. Se tienen dos clases de papas de calidades A y B, y éstas se mezclan en la proporción de 4 a 1 obteniéndose un peso total de 2800 Kg. El precio de costo de la calidad A es S/. 10 el Kg. y el de la calidad B es S/. 14 el Kg.
¿A cuánto se debe vender un kilogramo de la mezcla para ganar el 5% del precio de venta y pagar un impuesto del 5% del precio de venta?

a) 12 b) 10,8 c) 11,20
d) 13,2 e) 14

50. Dos clases de vino están mezcladas en 3 recipientes. En el primero, en la razón 1 : 1; en el segundo, en la razón 1 : 2 y en el tercero, en la razón 1 : 3.
Si se saca el mismo volumen de todos los recipientes para formar una mezcla que contenga 39 litros de la primera calidad.
¿Cuántos litros se extrae de cada recipiente?

a) 12 b) 24 c) 36
d) 48 e) 60

51. Se han mezclando L litros de alcohol a A% de pureza con (L + 2) litros de alcohol de $\frac{5}{8}$ A% de pureza y (L – 2) litros de otro alcohol.
Luego de la mezcla, los 3L de mezcla tienen $\frac{5}{6}$A% de pureza, entonces la pureza del tercer alcohol es (L > 2)

a) $\frac{L(7A-10)}{8(L-2)}$ b) $\frac{A(7L-10)}{8(L-2)}$
c) $\frac{L(7A-10)}{8(L+2)}$ d) $\frac{A(7L-10)}{8(L+2)}$
e) $\frac{(L+2)(7A-10)}{8L}$

52. Se han mezclado dos vinos. 22HI de S/. 0,30 el litro con 78 HI de S/. 0,25 el litro.
Si se desea obtener una mezcla de S/. 0,20 el litro, la cantidad de agua que se debería agregar a la mezcla sería:

a) 6050 b) 2050 c) 1050
d) 4050 e) 3050

53. En un recipiente hay 30lts. de vino, 40L. de alcohol y 10L de agua. Se retiran 16L de la mezcla y se reemplazan con alcohol. Finalmente se extraen 40L de la mezcla resultante y se reemplazan con agua.
Halle las cantidades finales de vino, alcohol y agua (en ese orden).

a) 12 ; 24 ; 44 b) 22 ; 43 ; 15
c) 15 ; 22 ; 43 d) 15 ; 43 ; 22
e) 43 ; 22 ; 15

54. Se tienen 2 barras de oro. En la primera el 80% del peso total es oro y en la segunda el 75% de su peso es oro, siendo ésta el cuádruple de la anterior, si se mezclan.
¿De qué pureza resulta dicha mezcla?

a) 0,48 b) 0,56 c) 0,76
d) 0,38 e) 0,82

55. Un comerciante tiene 3 tipos de arroz, cuyos precios por kilogramo son: 2,50; 3,00 y 4,00 soles, respectivamente, los dos primeros están en la relación de 4 a 5. El comerciante desea vender, mezclando el arroz que tiene; pero por error equivoca los costos del segundo y tercer tipo de arroz, por lo cual el precio medio aumentó en 0,40 soles.
¿A qué precio vendió cada Kg. si gana un 10% en la venta?

a) S/. 3,20 b) S/. 3,50 c) S/. 3,63
d) S/. 3,75 e) S/. 4,00

56. Se mezclan 3 calidades de vinos en cantidades que son I.P a 3 números enteros que están en progresión geométrica creciente.
El tercer vino representa $\frac{1}{13}$ de la mezcla.
¿Cuál es su precio, si el primero y el segundo valen el doble y el triple del tercero y el precio medio resultó S/. 28 el litro?

a) S/. 10 b) S/. 14 c) S/. 13
d) S/. 26 e) S/. 18

57. Se han mezclado tres sustancias, cuyos precios son proporcionales a 1; 5 y 12, utilizando de la segunda sustancia un 20% más que de la primera y de la tercera un 40% más que de la segunda. Si el precio medio por kilogramo de la mezcla es mayor en S/. 27 que la diferencia de los precios de las 2 primeras sustancias, calcular si gana o pierde, sabiendo que al vender fija un precio aumentando su costo en 60% y en la venta hace 2 descuentos sucesivos de 25%.

a) Pierde S/. 6,30 b) Gana S/. 2,10
c) Pierde S/. 4,20 d) Gana S/. 4,20
e) Pierde S/. 2,10

58. Una persona mezcla arroz de S/. 2,40 y S/. 3,20 el kilogramo. Si vendiera el kilogramo a S/. 3,00, ganaría S/. 10,00 más en total, que si lo vendiera a S/. 2,90.
¿A qué precio debe fijar el precio de un kilogramo tal que al hacer un descuento del 20% del precio fijado, aún se gana el 25% de su costo?. Sabiendo además que se tiene 20 kilogramos más del segundo arroz que el primero.

a) S/. 2,88 b) S/. 3,20
c) S/ 3,80 d) S/. 4,25
e) S/. 4,50

59. Un barril contiene 4 L de vino por cada 5L de agua. Se empieza a adicionar al barril simultáneamente vino a razón de 6 litros por minuto y agua a razón de 4 litros por minuto, hasta que la mezcla contenga 50% de vino y se observa que, en este tiempo, la cantidad de líquido que ha entrado al barril es inferior en 32 litros a la que había inicialmente.
¿Cuál es el contenido final de la mezcla en el barril?

a) 84ℓ b) 96ℓ c) 108ℓ
d) 112ℓ e) 120ℓ

60. Se funden "m" kg de cobre con 48 kg de oro de 21K y se obtiene una aleación de ley $(21 - n)K$, si se funden los 48 kg de oro de 21K con "m" kg de oro de 14K, se obtiene una aleación cuya ley es $(23 - n)K$. Si mezclamos dos tipos de arroz en la proporción de ***m*** a ***n*** y la mezcla se vende con una ganancia del 20%; después se mezclan en relación de ***n*** a ***m*** y se vende con el 50% de beneficio.
Calcular la relación de los precios de estos dos tipos de arroz, los precios de venta en ambos casos son iguales.

a) $\frac{11}{13}$ b) $\frac{17}{23}$ c) $\frac{17}{28}$
d) $\frac{29}{23}$ e) $\frac{29}{23}$

Claves

01.	e
02.	c
03.	e
04.	b
05.	d
06.	d
07.	b
08.	c
09.	c
10.	c
11.	c
12.	b
13.	d
14.	b
15.	a
16.	c
17.	e
18.	d
19.	c
20.	b
21.	b
22.	d
23.	a
24.	e
25.	a
26.	c
27.	d
28.	a
29.	b
30.	e

31.	c
32.	a
33.	c
34.	c
35.	d
36.	a
37.	b
38.	e
39.	a
40.	d
41.	c
42.	b
43.	a
44.	d
45.	e
46.	b
47.	b
48.	a
49.	a
50.	c
51.	b
52.	e
53.	a
54.	c
55.	c
56.	c
57.	a
58.	e
59.	d
60.	c

Capítulo

6 MAGNITUDES PROPORCIONALES

INTRODUCCIÓN

Existen distintas magnitudes, algunas de las cuales se pueden contar, otras se pueden medir. Cuando preguntamos ¿Cuántos? pensamos en la cantidad de objetos de un conjunto ***discreto*** y cuando preguntamos ¿Cuánto? pensamos en medir, es decir, el objeto es un conjunto ***continuo***. En este capítulo, estudiaremos las dos maneras más comunes de relacionar los valores de 2 magnitudes.

MAGNITUD

Propiedad de la materia o de un fenómeno físico o químico suceptible de variación, es decir puede aumentar o disminuir.

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

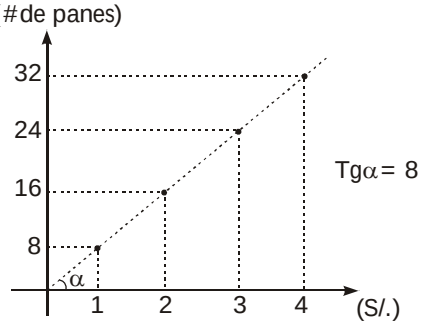
Suponga que dos magnitudes están relacionadas de modo que al duplicar el valor de una de ellas, el valor de la otra también se duplica; al triplicar la primera, la segunda también queda multiplicada por tres, etc. Siempre que sucede esto, decimos que existe entre ambas magnitudes, una relación de proporción directa. Por ejemplo, si contamos la cantidad de panes que se pueden comprar con cierta cantidad de soles:

SOLES	# PANES
1 sol	8 panes
2 soles	16 panes
3 soles	24 panes
4 soles	32 panes

Además, se cumple que el cociente de los valores correspondientes de las magnitudes es constante

$$\frac{\#\text{ panes}}{\text{soles}} = \frac{8}{1} = \frac{16}{2} = \frac{24}{3} = \frac{32}{4} = 8 \text{ (constante)}$$

Si graficamos los valores correspondientes de las magnitudes en el plano.



Los puntos se encuentran sobre una recta que pasa por el origen.

Obs: La pendiente de la recta es igual a la constante de proporcionalidad. Este valor se puede calcular como la tangente del ángulo agudo que forma la recta con el eje x^+.

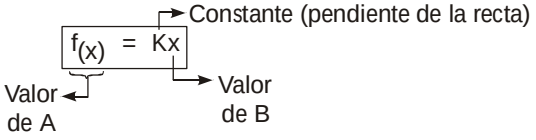
En general:

$$\boxed{A \text{ D.P. } B \rightarrow \frac{\text{Valor de A}}{\text{Valor de B}} = \text{constante}}$$

Obs:

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ DP } B \\ A \ \alpha \ B \end{array}\right\} \text{se lee A es directamente proporcional a B}$$

Se puede afirmar que el valor de una de las magnitudes depende linealmente de la otra:



Es importante observar que, al aplicar un modelo matemático para analizar una situación concreta, debemos tener en cuenta los límites de la validez del modelo.

En particular, cuando afirmamos que una magnitud A es proporcional a otra magnitud B, debemos dejar claro (explícita o tácitamente) que esto se da dentro de ciertos límites de variación para x e y. Por ejemplo la conocida "Ley de Hooke" dice que la deformación sufrida por un cuerpo elástico (por ejemplo, un resorte) es directamente proporcional a la (Intensidad de la) fuerza empleada.

$$\boxed{\text{deformación} = K \times (\text{fuerza})}$$

La validez de esta ecuación como modelo matemático para representar al fenómeno está sujeta a restricciones la fuerza no puede ser muy pequeña porque entonces aún siendo positiva, no sería suficiente para deformar el resorte; en este caso tendríamos deformación = 0 con una fuerza > 0, luego no valdría el modelo d = K . F, tampoco se puede tomar

F muy grande porque el resorte se destruiría y poco antes de eso su deformación no sería proporcional a F.

MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

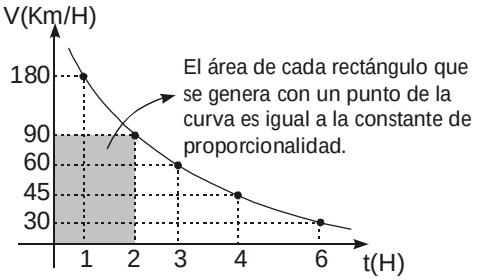
Supongamos que una persona realiza un viaje por automóvil en una distancia de 180km. entre una ciudad y otra. Sea ***V*** la velocidad constante del auto y ***t*** el tiempo transcurrido en el viaje.

V(Km/H)	t(H)
30	6
45	4
60	3
90	2

Se puede observar que al duplicar la velocidad, el tiempo se divide entre 2, y al triplicar la velocidad, el tiempo se reduce a su tercera parte. Además se cumple que el producto de los valores correspondientes de las magnitudes es constante.

$$V \times t = 30 \times 6 = 45 \times 4 = 60 \times 3 = 90 \times 2 = \text{constante}$$

La gráfica de los valores correspondientes de las magnitudes en el plano es:

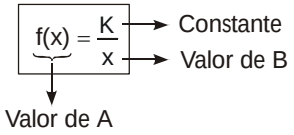


Los puntos se encuentran sobre una rama de hipérbola equilátera.

En general:

$$A \text{ IP } B \rightarrow (\text{Valor de A})(\text{Valor de B}) = \text{constante}$$

Esta relación se puede expresar:



PROPIEDADES

I. Si:

$$A \text{ IP } B \Rightarrow A \text{ DP } \frac{1}{B}$$

II. Si:

$$A \text{ DP } B \wedge B \text{ DP } C \rightarrow A \text{ DP } C$$
$$A \text{ DP } B \wedge B \text{ IP } C \rightarrow A \text{ IP } C$$
$$A \text{ IP } B \wedge B \text{ DP } C \rightarrow A \text{ IP } C$$
$$A \text{ IP } B \wedge B \text{ IP } C \rightarrow A \text{ DP } C$$

III. Si:

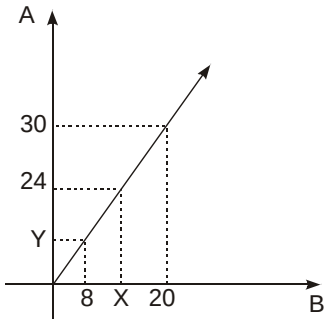
$$A \text{ DP } B \Rightarrow A^n \text{ DP } B^n$$
$$A \text{ IP } B \Rightarrow A^m \text{ IP } B^m$$

IV. Si:
A DP B (Cuando C es constante)
y A IP C (Cuando B es constante)
Se cumple:

$$\frac{A \times C}{B} = \text{constante}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Si: A DP B, hallar (X + Y) del gráfico.



a) 14 b) 28 c) 30
d) 22 e) 36

02. El número a es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número b.
Si: $a = \frac{5}{7}$ cuando b = 49.
¿Cuál es el valor de b, si $a = \frac{1}{4}$?

a) 250 b) 300 c) 500
d) 360 e) 400

03. La presión en un balón de gas es IP a su volumen; es decir a menor volumen mayor presión. Un balón de 240 litros soporta una presión de 4,8 atm.
¿Qué presión soportará un balón de 60 litros?

a) 19,2 atm b) 16,4 atm
c) 14,4 atm d) 18,2 atm
e) 16 atm

04. ¿Cuántos gramos pesará un diamante que vale $ 112,5; si uno de 6 g. vale $ 7,2 además se sabe que el valor del diamante es proporcional con el cubo de su peso?

a) 9,2 5g. b) 13,66 g. c) 15,00 g.
d) 19,20 g. e) 21,00 g.

05. Según la Ley de Boule, la presión es inversamente proporcional al volumen que contiene determinada cantidad de gas.
¿A qué presión está sometido un gas si al aumentar esta presión en 2 atmósferas, el volumen varía en 40%?

a) 6 b) 5 c) 4
d) 3 e) 2

06. Si A IP B y DP C, cuando A=5, B=4, C=2.
Hallar "C" cuando A = 6, B = 9

a) 4 b) 5,4 c) 5
d) 6,2 e) 7

07. Si A DP B é IP C, cuando $C = \frac{3}{2}$, A y B son iguales.
¿Cuál es el valor de B cuando A = 1 y C = 12?

a) 8 b) 6 c) 4
d) 12 e) 9

08. Se sabe que A es DP a $\sqrt{B}$ e IP $\sqrt[3]{C}$.
Además cuando A es 14 entonces B=64 y C=B.
Hallar A cuando B sea 4 y C sea el doble de B.

a) 7 b) 2 c) 4
d) 5 e) 6

09. Si A D.P. B y C e I.P. D^2. Averiguar cómo varía "A" cuando "B" aumenta en su tercera parte "C" disminuye sus $\frac{2}{5}$ y "D" aumenta en la $\frac{1}{5}$ parte de su valor.

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{5}{9}$ c) $\frac{4}{9}$
d) $\frac{4}{7}$ e) $\frac{2}{7}$

10. Si: "A" D.P. "B" e I.P. C^2 y cuando: A = 18; B = 9; C = 2.
Hallar "C", cuando A = 16 y B = 450.

a) 2 b) 5 c) 5
d) 18 e) 15

11. Se tienen 3 magnitudes A, B y C tales que A es DP a C e IP a $\sqrt{B}$.
Hallar A cuando $B = C^2$ sabiendo que A = 10 entonces B = 144 y C = 15.

a) 4 b) 8 c) 12
d) 16 e) 15

12. P varía inversamente proporcional con la enésima potencia de Q. P varía de $\frac{5}{2}$ a $\frac{5}{8}$ cuando Q varía de 8 a 64.
Hallar "n"

a) $\frac{4}{3}$ b) 2 c) $\frac{3}{2}$
d) $\frac{2}{3}$ e) 3

13. La deformación producida por un resorte al aplicarse una fuerza es D.P. a dicha fuerza. Si a un resorte de 30 cm. de longitud se le aplica una fuerza de 3N, su nueva longitud es 36 cm.
¿Cuál será la nueva longitud del resorte si se le aplica una fuerza de 4N?

a) 48 cm b) 38 cm c) 40 cm
d) 36,5 cm e) 34 cm.

14. ¿Cuál es el peso de un diamante que vale 55000 soles, si uno de 6 kilates cuesta 19800 y el precio es proporcional al cuadrado de su peso?
(Tómese 1 kilate igual a 0,25 g)

a) 6 gramos b) 6,35 gramos
c) 2,5 gramos d) 25 gramos
e) 62,5 gramos

15. Una rueda A de 80 dientes engrana con otra rueda B de 50 dientes. Fijo al eje de B hay otra rueda C de 15 dientes que engrana con una rueda D de 40 dientes. Si A da 120 vueltas por minuto.
¿Cuántas vueltas dará la rueda D?

a) 70 b) 72 c) 60
d) 90 e) 96

16. Dos magnitudes son inversamente proporcionales a una tercera.
¿Cómo son entre sí estas magnitudes?

a) Iguales.
b) Recíprocas.
c) Inversamente proporcionales.
d) Directamente proporcionales.
e) No se puede afirmar relación alguna.

17. El peso de un disco es D.P. al cuadrado de su radio y a su espesor, 2 discos tienen sus espesores en la razón de 8 a 9 y el peso del segundo es la mitad del peso del primero.
¿Cuál es la razón de sus radios?

a) $\frac{8}{9}$ b) $\frac{8}{5}$ c) $\frac{3}{2}$
d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{5}$

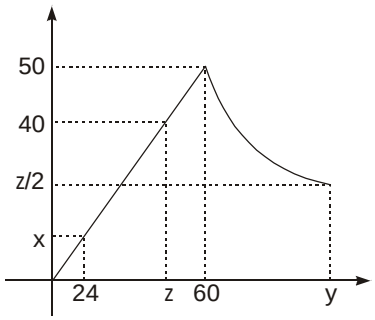
18. Sea f: una función de proporcionalidad tal que: f(4) + f(6) = 20, entonces el valor de producto: $f\left(\frac{21}{5}\right)\cdot f(5)\cdot f(7)$ es:

a) 324 b) 2425 c) 1176
d) 3675 e) 576

19. Sea f una función de proporcionalidad tal que: f(3) + f(7) = 20.
Entonces el valor del producto $f\left(\frac{21}{5}\right) f(5) f(7)$ es:

a) 147 b) 1470 c) 1170
d) 1716 e) 1176

20. Hallar: x + y + z

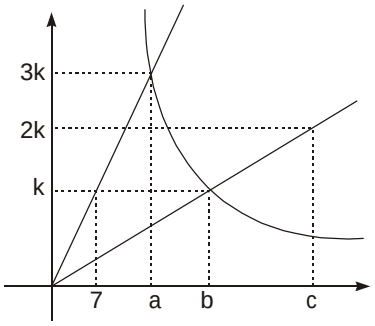


a) 180 b) 193 c) 200
d) 120 e) 48

21. Si A varía proporcionalmente con B^2+4 y B varía proporcionalmente con $\sqrt{C}-5$; además cuando A = 16 ; B = 2 ; C = 81, calcular A cuando C = 49.

a) 8 b) 9 c) 10
d) 11 e) 12

22. Si: a + b + c + x = 215



Hallar : b – c + 5a – 4x

a) 22 b) 32 c) 43
d) 12 e) 10

23. Si: A, B, C y D son magnitudes proporcionales, además:
A^2 D.P. B (C; D son constantes)
A I.P. $\sqrt[3]{C}$ (B; D son constantes)
D^2 DP $\sqrt{A}$ (B; C son constantes)
Si cuando:
A = 2 ; B = 9 ; C = 125 ; D = 2.
¿Cuál es el valor de C, cuando A = 99 ; B = 121 y D = 6?

a) 30 b) 270 c) 2700
d) 900 e) 27000

24. Se tienen dos magnitudes A y B tales que A DP B^2 .
Si cuando A = 180 , B = 6.
Hallar A cuando: $A \times B = 2560$

a) 320 b) 8 c) 64
d) 16 e) 192

25. Una magnitud A es DP a B y C e IP a D^2 . ¿Qué variación experimenta A cuando B se duplica, C aumenta en su doble y D se reduce a su mitad?

a) Aumenta 30 veces su valor.
b) Aumenta 23 veces su valor.
c) Se reduce $\frac{1}{3}$
d) Se duplica.
e) Aumenta 3 veces su valor.

26. Sea V el volumen de un paralelepípedo rectangular de ancho "a", largo "b", altura "h", las cuales son variables, h es independiente del valor de a; b es inversamente proporcional al valor de a.
Entonces:

a) V es directamente proporcional a "a"
b) V es inversamente proporcional a "a"
c) V es directamente proporcional a "b"
d) V es inversamente proporcional a "b"
e) V es directamente proporcional a "h"

27. Dadas las magnitudes A, B y C si A D.P. B (cuando "C" permanece constante); A I.P. C^2 (cuando "B" permanece constante).
Si en un determinado momento el valor de B se duplica y el valor de C aumenta en su doble, el valor de A varía en 35 unidades.
¿Cuál era el valor inicial de A?

a) 10 b) 25 c) 45
d) 35 e) 40

28. Las magnitudes A, B y C guardan las siguientes relaciones:
* Con C: constante:

A	a	8a	27a	64a
B	b	0,5b	$0,\widehat{3}b$	0,25b

* Con B : constante:

A	a	2a	3a	4a
C	0,25c	c	2,25c	4c

Si cuando A = 4, B = 9 y C = 16.
Hallar A cuando B = 3 y C = 4.

a) 36 b) 42 c) 48
d) 54 e) 60

29. La velocidad del sonido en el aire es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta. Si la velocidad del sonido a 16ºC es 340 m/s, ¿Cuál será la velocidad a 127ºC?

a) 380 m/s b) 400 m/s c) 420 m/s
d) 450m/s e) 500 m/s

30. Dos discos circulares hechos del mismo material tienen sus radios que están en relación de 4 a 5, mientras sus espesores están en relación de 5 a 8. Si juntos pesan 63 Kg, hallar el peso del disco menos pesado.

a) 5 Kg b) 18 Kg c) 15 Kg
d) 20 Kg e) 25 Kg

31. Dos cantidades A y B son inversamente proporcionales con constante de proporcionalidad igual a K. ¿Cuánto vale K si la constante de proporcionalidad entre la suma y diferencia de A y $\frac{1}{B}$ vale 6?

a) $\frac{6}{5}$ b) $\frac{7}{5}$ c) 2
d) 7 e) Faltan datos

32. Si A varía en forma DP con B y C; C varía directamente proporcional con F^3. Cuando B = 5 y F = 2, entonces A = 160. Hallar A cuando B = 8 y F = 5

a) 4000 b) 3800 c) 3500
d) 3200 e) 3400

33. Se sabe que un cuerpo que cae libremente recorre una distancia proporcional al cuadrado del tiempo. Una piedra recorre 9,8 m. en un segundo cuatro décimos. Determinar la profundidad de un pozo, si se sabe que al soltar la piedra ésta llega al fondo en dos segundos.

a) 10 m. b) 14 m. c) 20 m.
d) 22 m. e) 40 m.

34. Sean 3 magnitudes A; B y C.

Para A = cte:

B	16	24	40
C	6	9	15

Para B = cte:

A	4	16	9
C	6	3	4

Si A = 4; cuando C = 10 y B = 5
Hallar A cuando C = 5 y B = 10
Dar la diferencia de cifras de A.

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

35. En una joyería, se sabe que el precio de cualquier diamante es proporcional al cuadrado de su peso y que la constante de proporcionalidad es la misma para todos los diamantes.
Un diamante que cuesta 360000 dólares se rompe en dos partes, de las cuales el peso de una de ellas es el doble de la otra.
Si las dos partes son vendidas, entonces podemos afirmar que:

a) Se perdió 140000 dólares.
b) Se ganó 160000 dólares.
c) Se perdió 160000 dólares.
d) Se ganó 200000 dólares.
e) No se ganó ni se perdió.

36. Si A DP B (cuando C es constante) A IP $\sqrt{C}$ (cuando B es constante). En un determinado momento A vale 720. Si a partir de ese momento B aumenta en 80% y C disminuye en 36%, ¿Qué valor tomaría A?

a) 1200 b) 1440 c) 1620
d) 1728 e) 1500

37. Para 4 magnitudes A, B, C y D se conoce : A DP a B; $\sqrt{B}$ IP a C; C^3 DP a $\frac{1}{D}$. Entonces:

a) A^2 DP D^3 b) A^3 DP D^2
c) A DP D^2 d) A DP D
e) A^2 IP D^3

38. Sea $f(x^2)$ una función de proporcionalidad directa y $g\left(\sqrt[3]{y}\right)$ es una función de proporcionalidad inversa.
Si : f(100) = 1200 y g(2) = 15.
Calcular: (a + b)
Si: $f(a^2) = 2700$ y $g\left(\sqrt[3]{b}\right) = 6$

a) 155 b) 140 c) 105
d) 124 e) 72

39. En un edificio, el volumen de agua que se lleva a un cierto piso es IP a T^n, donde "T" es el tiempo que demora en llegar el agua al piso "n".
Si cuando se lleva 80 litros al segundo piso la demora es de 4 minutos.
¿Qué tiempo demorará en llegar 5 litros al octavo piso?

a) 2 min b) 4 min c) 8 min
d) 16 min e) 3 min

40. Si las ruedas M, C, A y B; donde M y C tienen un eje común, C y A engranan; A y N tienen un eje común.
Si la rueda M da 75 revoluciones por segundo y se observa que la rueda N gira en 25 revoluciones por segundo. Determinar el número de dientes de la rueda C si ésta tiene 20 dientes menos que la rueda A.

a) 10 b) 20 c) 30
d) 15 e) 5

41. Al medir el radio de una pista circular se comete un error que es DP a su verdadero valor y el error al calcular su área es DP a la raíz cuadrada de su verdadero valor. Determinar el error de calcular el área cuando el error de medir el radio es de 9m, si cuando el error de calcular el área es de $10,7m^2$ el error de medir su radio es de 3m.

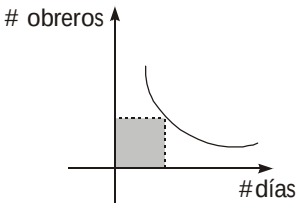
a) $40,28m^2$ b) $36,75m^2$
c) $32,1m^2$ d) $33,21m^2$
e) $21,2m^2$

42. La duración de un viaje por ferrocarril es directamente proporcional a la distancia e inversamente proporcional a la velocidad. A su vez la velocidad es IP al número de vagones del tren. Si un tren de 20 vagones recorre 30 km. en $\frac{1}{2}$ hora.
¿Cuántos kms. puede recorrer un tren de 10 vagones en 10 min?

a) 10 km. b) 15 km. c) 18 km.
d) 20 km. e) 16 km.

43. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Para dos magnitudes inversamente proporcionales, su gráfico es una rama de una hipérbola equilátera, si las magnitudes son continuas, o puntos de una rama de una hipérbola equilátera si una de las magnitudes es discreta.
II. Para dos magnitudes directamente proporcionales, su gráfica es una recta si las magnitudes son continuas, o puntos que pertenecen a una recta si una de las magnitudes es discreta.
III. En la gráfica mostrada para las magnitudes: número de obreros y números de días, el área de la región sombreada es la obra.



a) VVF b) VFV c) FFV
d) FFF e) VVV

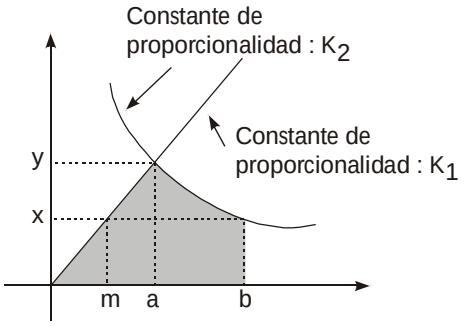
44. Denominaremos "S" a la suma de dos cantidades de modo tal que una de ellas es directamente proporcional a x^2 y la otra inversamente proporcional a x^2, entonces, cuando $x=\sqrt{2}$, S = 20, para $x=\sqrt{3}$, S = 15.
Determinar si S tiene un máximo o un mínimo y el valor de este.

a) $S_{mínimo} = 6$; para $x=\sqrt{6}$
b) $S_{mínimo} = 12$; para $x=\sqrt{6}$
c) $S_{mínimo} = 24$; para $x=\sqrt{8}$
d) $S_{mínimo} = 36$; para $x=\sqrt{8}$
e) Faltan datos.

45. El precio de un cristal es DP al cuadrado de su peso. Un diamante se compró en S/. 30240, de peso igual a $10\sqrt{8}W$, se fraccionó en "n" partes; tales que sus pesos son entre sí como :
$W\sqrt{50.1}$; $W\sqrt{49.2}$; $W\sqrt{48.3}$; ..... ; $W\sqrt{(51-n)n}$
perdiendo S/. 3402
Hallar el valor de "n"

a) 6 b) 5 c) 10
d) 8 e) 9

46. Hallar: $K_1 + K_2$ del siguiente gráfico:



Si el área de la región sombreada es $81,45u^2$.
Además: $m=\frac{2a}{3}$; x = 20
Considere: Lna = 1,099 ; Lnb = 1,504

a) 100 b) 200 c) 300
d) 400 e) 50

47. El número de paraderos que tiene un ómnibus en su recorrido es directamente proporcional al espacio recorrido y la velocidad es proporcional al número de pasajeros que transporta. Si en un recorrido que emplea una velocidad de 42 km/h y se detiene en 24 paraderos ha transportado 60 pasajeros, determinar en cuántos paraderos se detiene en otro recorrido, con una velocidad de 63 km/h; habiendo transportado 108 pasajeros.
a) 20 b) 23 c) 25
d) 30 e) 32

48. Dada la siguiente relación de proporcionalidad :

* Con C : constante:

A	0,06	2,16	6	8,64
B	0,1	0,6	1	1,2

* Con B : constante:

A	26,6	20	8	4
C	0,027	0,064	1	8

Si cuando A = 1, C = 125; B = 5.

Calcular A cuando $C = 8B^6$

a) 0,1 b) 10^{-2} c) 0,2
d) 10^{-1} e) 0,4

49. Se tiene 6 ruedas dentadas, y se sabe que sus números de dientes son proporcional a 1, 2, 3, 4, 5 y 6 respectivamente. La primera engrana con la segunda y fija al eje de ésta va montada la tercera que engrana con la cuarta en cuyo eje va montada la quinta rueda, que a su vez engrana con la sexta rueda. Si la sexta rueda da 250 RPM.
¿En cuánto tiempo la primera rueda dará 8000 vueltas?

a) 15 min b) 12 min c) 18 min
d) 10 min e) 9 min

50. El tiempo que emplea un ómnibus en hacer su recorrido varía en forma DP al número de estaciones que realiza. Un ómnibus de la línea "A" demora 8h en hacer su recorrido, realizando 48 estaciones.
¿Con cuántos pasajeros partió otro ómnibus de la misma línea, si tarda 50 minutos en realizar su recorrido, si en la primera estación bajaron 2 personas, en la segunda estación bajaron 3 personas, en la tercera estación bajaron 4 personas y así sucesivamente hasta llegar a la última estación?
Además, se sabe que llegó completamente vacío.

a) 10 b) 20 c) 30
d) 40 e) 50

51. Del siguiente cuadro:

A	4	4	20	16	y	4	4	20
B	72	x	3	3	3	50	72	3
C	12	28	50	32	18	10	w	z

Hallar: x + y + z + w

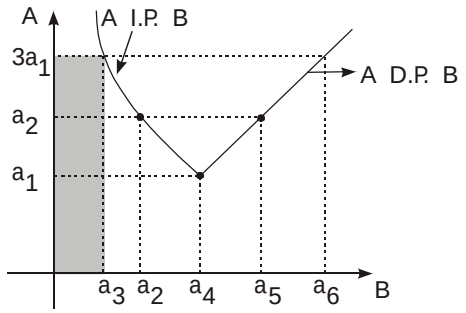
a) 456 b) 356 c) 666
d) 566 e) 466

52. Se sabe que el trabajo hecho por un hombre en 1 hora es proporcional a su pago por hora e IP a la raíz cuadrada del número de horas que trabaja por día. Sabemos que puede terminar un trabajo en 8 días, cuando trabaja 9 horas diarias a razón de 50 soles la hora.
¿Cuántos días empleará para hacer el mismo trabajo, cuando trabaje 16 horas diarias razón de 60 soles la hora?

a) $8\frac{8}{9}$ días b) $9\frac{1}{9}$ días c) $10\frac{2}{9}$ días
d) 9 días e) 5

53. Sea A y B dos magnitudes, donde $a \in Z^+$.

Además el área de la región sombreada es $36\mu^2$



Calcular: $\sum_{k=1}^{6} a_k$

a) 85 b) 80 c) 75
d) 91 e) 126

54. Determine las relaciones de proporcionalidad entre las magnitudes U, S y M según el cuadro.

U	15	30	10	270	60	15	72
S	12	6	18	6	12	x	y
M	10	10	10	30	20	15	x + 13

Dar como respuesta $x^2 + y^2$

a) 2329 b) 2419 c) 2749
d) 2129 e) 2519

55. Del siguiente cuadro:

5	9	5	4	5	21
64	81	x	16	24	y
18	3	8	3	128	3

Hallar: x + y

a) 538 b) 438 c) 338
d) 537 e) 436

56. Si : $f_{(a+b)} = f_{(a)} + f_{(b)}$; $a, b \in Q$.

Además: $f_{(1)} = 4$

Halar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

I. $f\left(\frac{7}{4}\right) = 7$

II. $f_{(7)} + f_{(13)} = 80$

III. $f_{(2001)} = 8004$

a) VVV b) FVV c) FFV
d) VFF e) FVF

57. Para valores de $B \leq 9$, las magnitudes A y B cumplen que A DP B^2 ; para valores de $9 \leq B \leq 16$ A I.P. $\sqrt{B}$; para valores de $B \geq 16$ se cumple que :
4LogA + 5LogB es constante.
Si se sabe que cuando A = 16, B = 2 y cuando $A = \overline{mn}$, $B = \overline{pq}$, donde $\overline{pq}$ es un cuadrado perfecto y "q" es mínimo.
Dar: m + n

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

58. Si se cumple que la magnitud A es DP a la magnitud B, y la magnitud B es DP a la suma de las magnitudes $C_1 ; C_2 ; C_3 ; ... ; C_n$.
Si cuando $C_1 = 1$; $C_2 = 3$; $C_3 = 5$; ... ; $C_n = 31$.
A = 1024
Hallar A
Si : $C_1 = 2$; $C_2 = 4$; $C_3 = 6$; ... ; $C_n = 32$

a) 455 b) 272 c) 2
d) 554 e) 1088

59. Si $f_{(x)}$ es una función de proporcionalidad inversa, halle:

$$A = \frac{f_{(30)} \cdot f_{(20)}}{f_{(60)}}$$

Si:

$$f_{(2)} + f_{(3)} = \overline{abc}$$

Donde : $\overline{abc}$ es cuadrado perfecto, que se representa con 3 cifras en base 5.
Además: $a + b + c$ tiene la mínima cantidad de divisores.

a) 24 b) 12 c) 6
d) 8 e) 10

60. Según la ley de Hooke (Robert Hooke Londres 1678), el alargamiento que sufre una barra prismática es proporcional a su longitud, a la fuerza que se le aplica, e inversamente proporcional a su sección y rigidez. Si a una barra de acero de 100 cm. de largo y $50mm^2$ de sección se le aplica 2500 Kg, sufre un alargamiento de 1mm.
Hallar qué alargamiento ocasionó 800 kg. aplicados a una barra de aluminio de 75 cm. de largo, de $16mm^2$ de sección sabiendo que la rigidez del aluminio es la mitad que la del acero.

a) 1 mm b) 3 mm c) 2 mm
d) 1,5 mm e) 0,5 mm

Claves

01.	b
02.	e
03.	a
04.	c
05.	d
06.	b
07.	a
08.	a
09.	c
10.	e
11.	b
12.	d
13.	b
14.	c
15.	b
16.	d
17.	c
18.	c
19.	e
20.	b
21.	c
22.	a
23.	e
24.	a
25.	b
26.	e
27.	c
28.	d
29.	b
30.	b

31.	b
32.	a
33.	c
34.	c
35.	c
36.	c
37.	b
38.	b
39.	a
40.	a
41.	c
42.	d
43.	a
44.	b
45.	b
46.	a
47.	a
48.	d
49.	d
50.	b
51.	e
52.	e
53.	a
54.	a
55.	d
56.	a
57.	e
58.	e
59.	b
60.	d

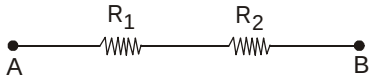
Capítulo

7 REPARTO PROPORCIONAL

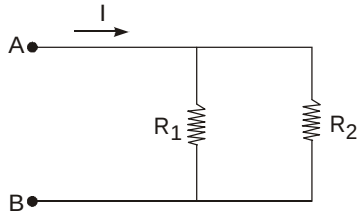
INTRODUCCIÓN

* El 29 de Junio fueron de pesca Pedro, Juan y Pablo. Consiguieron 8, 9 y 10 pescados, respectivamente, que compartieron en partes iguales con Jesús, el cual muy bondadoso, entregó 27 panes para que se repartan entre ellos. ¿Cuántos panes le corresponden a Pedro?
(No se apresure, la respuesta no es 8)

* Cuando se tiene un circuito resistivo serie como:



La tensión entre los puntos A y B se reparte directamente proporcional a los valores de las resistencias R_1 y R_2. En cambio si se tiene un circuito paralelo.



La corriente I se reparte inversamente proporcional a los valores de las resistencias R_1 y R_2.
Así como este ejemplo, el reparto proporcional tiene su aplicación en la Economía, Ingeniería, Medicina, Agricultura, etc.

CONCEPTO:

Consiste en repartir una cantidad en forma proporcional a ciertos números denominados índices de reparto.

CLASES DE REPARTO:

1. ***Reparto Proporcional Simple:***
Es aquel reparto que se realiza en forma proporcional a un solo grupo de índices, este reparto puede ser de dos tipos:

   A. <u>Reparto Simple Directo</u>: Al efectuar este tipo de reparto, se obtienen partes que son directamente proporcionales a los índices.

En general repartir N DP a los índices $a_1 ; a_2 ; .... ; a_n$

Se cumple que las partes obtenidas:

$P_1 ; P_2 ; P_3 ; .... ; P_n$ son DP a los índices.

$$\frac{P_1}{a_1} = \frac{P_2}{a_2} = \frac{P_3}{a_3} = ... = \frac{P_n}{a_n} = K \quad (K: \text{Constante})$$

Como: $N = P_1 + P_2 + ...P_n$

$$\Rightarrow N \begin{cases} \text{Partes} \\ a_1K \\ a_2K \\ a_3K \\ \vdots \\ a_nK \end{cases}$$

$$\Rightarrow N = (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)K$$

$$\therefore \boxed{K = \frac{N}{(a_1 + a_2 + ... + a_n)}}$$

La constante de reparto es igual a la relación de la cantidad a repartir y la suma de los índices.

Ejemplo:

Repartir S/. 2500 DP a las edades de 3 hermanos que son : 6 , 7 y 12 años.

Resolución:

	PARTES		***D.P.***	
2500	A	:	6	$\Rightarrow 6K + 7K + 12K = 2500$
	B	:	7	
	C	:	12	

La constante: $K = \frac{2500}{(6+7+12)} = 100$

Luego:

A = 6(100) = 600
B = 7(100) = 700
C = 12(100) = 1200

NOTA: Si los índices de reparto se multiplican por una constante, se obtienen las mismas partes, o sea el reparto no varía.

Ejemplo:
Si repartimos 200 DP a 2 , 3 y 5

la constante es $\frac{200}{(2+3+5)} = 20$ entonces las partes son :

2(20) = 40 ; 3(20) = 60 y 5(20) = 100

Multipliquemos por 2 a todos los índices y hagamos de nuevo el reparto. La constante sería ahora :

$$\frac{200}{(4+6+10)} = 10$$

(es la mitad de la constante anterior)

Calculemos las partes :

4(10) = 40 ; 6(10) = 60 ; 10(10) = 100

Se puede observar que las partes no han variado.

B. <u>Reparto Simple Inverso</u>: Al efectuar este tipo de reparto, se obtienen partes que son inversamente proporcionales a los índices.

En general repartir N IP a los índices $a_1 ; a_2 ; .... ; a_n$

Se cumple que las partes obtenidas:

$P_1 ; P_2 ; P_3 ; .... ; P_n$ son IP a los índices.

$P_1 \cdot a_1 = P_2 \cdot a_2 = P_3 \cdot a_3 = ...$

$.. = P_n \cdot a_n = K$ ← Constante

Como : $N = P_1 + P_2 + P_3 + ...+ P_n$

$$\Rightarrow N = \frac{K}{a_1} + \frac{K}{a_2} + \frac{K}{a_3} + ... + \frac{K}{a_n}$$

Partes

$$\Rightarrow N \begin{cases} \frac{1}{a_1} \cdot K \\ \frac{1}{a_2} \cdot K \\ \frac{1}{a_3} \cdot K \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \cdot K \end{cases}$$

$$\Rightarrow K = \frac{N}{\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}\right)}$$

Ejemplo:

Repartir 6300 en partes IP a $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{7}$ y $\frac{1}{10}$

Resolución:

	PARTES	***IP <> DP***	
6300	A :	$\frac{1}{4}$	4
	B :	$\frac{1}{7}$	7
	C :	$\frac{1}{10}$	10

$\Rightarrow 4K + 7K + 10K = 6300$

$$K = \frac{6300}{4+7+10} = 300$$

Luego:
A = 4(300) = 1200
B = 7(300) = 2100
C = 10(300) = 3000

2. Reparto Proporcional Compuesto:
Este tipo de reparto se realiza proporcional-mente a varios grupos de índices.
Los repartos proporcionales compuestos pueden ser:

DIRECTOS: Si el reparto se realiza en partes directamente proporcionales a los índices.

INVERSOS: Si el reparto se realiza en partes inversamente proporcionales a los índices.

MIXTOS: Si el reparto se realiza en partes directamente proporcionales a algunos índices e inversamente proporcionales a otros.

Para efectuar un reparto compuesto se siguen los siguientes pasos:

1º Se convierte las relaciones IP a DP invirtiendo los índices (si los hubiera)

2º Se multiplican los índices correspondientes de cada grupo.

3º Se efectúa el reparto proporcional simple directo resultante.

REGLA DE COMPAÑÍA

Las grandes empresas y negocios no se constituyen, en general, con la iniciativa y el dinero de una sola persona. El capital y la técnica que puede aportar una persona determinada resultan en determinados casos insuficientes. Por esta razón, se hace necesaria la reunión de los capitales y técnicas de varias personas para hacer factible la explotación de un gran negocio.
Una agrupación de personas que aportan capitales y técnicas con la finalidad antes mencionada es lo que se llama una compañía o sociedad mercantil. Los beneficios o pérdidas de la compañía se han de repartir entre sus socios. El estudio de estos problemas de repartos es lo que se conoce como *regla de compañía*, que se estudiará en este tema.

Regla de Compañía: Es un caso particular del reparto proporcional, consiste en repartir las ganancias o pérdidas que se producen en una sociedad mercantil o compañía, entre los socios de la misma en forma DP a los capitales y a los tiempos que los mismos permanecen en el negocio.

Ejemplo:

1. Tres amigos se asocian para comprar un camión aportando capitales de 16000; 14000 y 10000 dólares. Si por cada mes de alquiler del camión perciben 3700 dólares.
   ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

   Resolución:
   Como el tiempo es el mismo para todos, entonces se reparte la ganancia DP a los capitales aportados.
   Entonces:

$$\frac{G_1}{16000}=\frac{G_2}{14000}=\frac{G_3}{10000}=\frac{G_1+G_2+G_3}{16000+14000+10000}$$

$$=\frac{3700}{40000}$$

$$G_1=16000\left(\frac{3700}{40000}\right)=1480$$

$$G_2=14000\left(\frac{3700}{40000}\right)=1295$$

$$G_3=10000\left(\frac{3700}{40000}\right)=925$$

2. Dos profesores de Aritmética: Javier y César escriben un libro para lo cual trabajan en distintos horarios. Si el primero trabaja 9 horas diarias en el proyecto y el segundo 6 horas más.
   ¿Cuál será el beneficio que obtiene el segundo si en total percibieron 900 soles?

   Resolución:
   Notamos que el beneficio de cada uno de ellos es proporcional al tiempo.

$$\frac{G_1}{9}=\frac{G_2}{15}=\frac{G_1+G_2}{9+15}=\frac{900}{24}$$

$$\Rightarrow G_1=9\left(\frac{900}{24}\right)=337{,}5\wedge G_2=15\left(\frac{900}{24}\right)=562{,}5$$

   Es decir Javier recibe S/. 337,50 y César recibe S/. 562,50

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Se ha repartido cierta cantidad entre 3 personas en partes proporcionales a los números 3; 4 y 5. Sabiendo que la tercera persona ha recibido S/. 600 más que la primera.
¿Cuánto dinero se distribuyó?

a) 3600 b) 3000 c) 2400
d) 1200 e) 2700

02. Un profesor caritativo quiere repartir S/. 300 entre 3 de sus alumnos, proporcionalmente al número de hermanos que cada uno tiene.
Hallar cuánto toca a cada uno, si el primero tiene 3 hermanos, el segundo 4 y el tercero 5.
Dar la diferencia entre la mayor y la menor parte.

a) 100 b) 125 c) 50
d) 150 e) 75

03. Un tutor "Trilce" quiere repartir S/. 57 entre tres alumnos, para efectuar el reparto tendrá en cuenta la cantidad de problemas no resueltos de la última tarea domiciliaria. El primero no resolvió 1 problema; el segundo 3 y el tercero 4.
¿Cuánto le corresponde al tercero?

a) 36 b) 12 c) 9
d) 28,5 e) 26

04. Dividir S/. 780 en tres partes de modo que la primera sea a la segunda como 5 es a 4 y la primera sea a la tercera como 7 es a 3.
La segunda es:

a) S/. 205 b) S/. 150 c) S/. 350
d) S/. 280 e) S/. 410

05. Repartir S/. 20500 entre 3 personas de modo que la parte de la primera sea a la segunda como 2 es a 3 y la segunda a la tercera como 4 es a 7.
Dar la mayor parte.

a) S/. 12500 b) S/. 3200
c) S/. 4000 d) S/. 6000
e) S/. 10500

06. Repartir 4710 nuevos soles en 3 partes que son inversamente proporcionales a $1\frac{1}{2}; 2\frac{2}{3}$ y $3\frac{3}{4}$.
Dar como respuesta la diferencia entre la mayor y la menor de las partes en que queda dividido 4710.

a) 1200 b) 240 c) 750
d) 1440 e) 372

07. Al repartir N DP 5; 8; 6 e IP a 12; 6 y 10, la diferencia entre la segunda y la tercera parte es 176.
Hallar: N

a) 526 b) 246 c) 324
d) 218 e) 564

08. Tres personas forman una sociedad, con 4800 dólares de capital. El primero aporta los $\frac{3}{8}$; el segundo los $\frac{8}{15}$ del resto.
Entonces el tercero aportó:

a) 1400 b) 1620 c) 1600
d) 700 e) 2800

09. Descomponer el número 1134 en cuatro sumandos cuyos cuadrados sean proporcionales a 12, 27, 48 y 75.

a) 162 , 243 , 324 y 405.
b) 161 , 244 , 324 y 405.
c) 162 , 242 , 325 y 405.
d) 162 , 243 , 323 y 406.
e) 160 , 245 , 322 y 407.

10. Se reparte 738 en forma directamente proporcional a dos cantidades; de modo que, ellas están en la relación de 32 a 9.
Hallar la suma de las cifras de la cantidad menor.

a) 18 b) 14 c) 13
d) 11 e) 9

11. Dividir 205 soles en tres partes de tal manera que la primera sea a la segunda como 2 es a 5, y la segunda sea a la tercera como 3 es a 4.
Indique la cantidad de soles de c/u.

a) 20 ; 85 ; 100 b) 30 ; 75 ; 100
c) 40 ; 75 ; 90 d) 25 ; 85 ; 95
e) 35 ; 80 ; 90

12. Cuatro socios reúnen 2000000 de dólares de los cuales el primero pone 400000; el segundo las $\frac{3}{4}$ de lo que puso el primero, el tercero las $\frac{5}{3}$ de lo que puso el segundo y el cuarto lo restante. Explotan una industria durante 4 años.
Si hay que repartir una ganancia de 1500000 dólares.
¿Cuánto le toca al cuarto?

a) 800000 b) 500000
c) 300000 d) 900000
e) 600000

13. Marina inicia un negocio con \$600; 6 meses después se asocia con Fernando quien aporta \$480 a la sociedad. Si después de 18 meses de asociados, se reparten una ganancia de \$1520.
¿Cuánto le corresponde a Marina?

a) \$950 b) \$570 c) \$600
d) \$920 e) \$720

14. Repartir 42 entre A, B y C de modo que la parte de A sea doble de la parte de B y la de C suma de las partes de A y B.
Entonces, el producto de las partes de A, B y C es:

a) 2058 b) 980 c) 686
d) 1856 e) 2158

15. Al dividir 36000 en tres partes que sean inversamente proporcionales a los números 6, 3 y 4 (en este orden), se obtienen tres números a, b y c.
Entonces: abc es:

a) 1536×10^9 b) 1535×10^9
c) 1534×10^9 d) 1528×10^9
e) 1530×10^9

16. Dos socios reunieron un capital de 10000 soles para hacer un negocio.
El primero dejó su capital durante 3 meses y el otro, durante 2 meses.
Se pide encontrar la suma de las cifras de la diferencia de los capitales aportados, sabiendo que las ganancias fueron iguales.

a) 4 b) 10 c) 7
d) 3 e) 2

17. En un juego de lotería, participan 4 amigos A, B, C y D; los cuales realizaron los aportes siguientes : A aportó el doble que C; B aportó un tercio de D pero la mitad de C.
Ganaron el premio y se repartieron de manera proporcional a sus aportes.
¿Cuánto recibió A, si D recibió S/. 1650?

a) S/. 1800 b) S/. 1950 c) S/. 2000
d) S/. 2100 e) S/. 2200

18. Se reparte una cantidad de dinero entre 5 hermanos, en forma DP a sus edades, que son números consecutivos.
Si lo que recibe el menor es el 75% de lo que recibe el mayor y la diferencia entre lo que recibe el 2do. y 4to. hermano es S/. 3000.
Hallar la cantidad de dinero repartido.

a) S/. 95000 b) S/. 108000
c) S/. 84000 d) S/. 100000
e) S/. 105000

19. Las edades de 4 hermanos son cantidades enteras y consecutivas. Se reparte una suma de dinero, proporcionalmente, a sus edades; de tal manera que el menor recibe los $\frac{4}{5}$ del mayor.
¿Cuánto recibe el mayor, si el segundo recibe S/. 140?

a) S/. 100 b) S/. 110 c) S/. 120
d) S/. 150 e) S/. 140

20. Tres personas forman una sociedad aportando cada uno de ellos igual capital. El primero de ellos lo impuso durante un año, el segundo durante 8 meses y el tercero durante un semestre.
Al final se obtiene un beneficio de S/. 1950.
¿Cuánto ganó el que aportó su capital durante mayor tiempo?

a) S/. 900 b) S/. 600 c) S/. 750
d) S/. 720 e) S/. 780

21. Al repartirse cierta cantidad en tres partes que sean DP a 3^N ; 3^{N-1} y 3^{N+1} e IP a 4^{N-1} ; 4^{N+1} ; 4^N respectivamente y se observa que la primera parte excede a la última en 216.
Hallar la suma de cifras de la cantidad a repartir.

a) 7 b) 8 c) 9
d) 10 e) 11

22. Se reparte cierta cantidad de dinero entre 3 personas, recibiendo el primero los $\frac{5}{7}$ de lo que recibió el segundo y el tercero $\frac{1}{18}$ menos de lo que recibieron las dos primeras personas, siendo esta suma igual a la mitad del total, disminuido en S/. 20.
Hallar dicha cantidad.

a) 1000 b) 1200 c) 1600
d) 1300 e) 1400

23. Al repartir un número en forma directamente proporcional a tres números primos entre sí, se obtienen las partes siguientes: 720 ; 1080 y 1800; entonces la suma de los tres números primos entre sí es:

a) 8 b) 11 c) 9
d) 10 e) 15

24. Un hombre decide repartir una herencia en forma proporcional al orden en que nacieron sus hijos. La herencia total es S/. 480000; adicionalmente deja S/. 160000 para el mayor, de tal modo que el primero y el último hijo reciban igual herencia.
¿Cuál es el mayor número de hijos que tiene este personaje?

a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 7

25. 3 obreros A, B y C trabajan en cierta obra. El propietario de la obra otorga quincenalmente una gratificación de 52 dólares para repartirla entre los que trabajan. En la quincena que trabajan A y B, corresponde a A los $\frac{3}{4}$ de la gratificación y a B el resto. En la quincena que trabajan B y C, el primero cobra los $\frac{3}{4}$ y el segundo el resto.
Determinar la cantidad que debe recibir B en la quincena que trabajan los tres.

a) 36 dólares b) 42 dólares
c) 12 dólares d) 16 dólares
e) 4 dólares

26. Dos agricultores A y B tienen respectivamente 9 y 5 hectáreas de terreno que desean sembrar.
Cuando ya habían sembrado $\frac{2}{7}$ de cada propiedad, contratan a un peón, y a partir de entonces los agricultores y el peón trabajan en partes iguales.
¿Cuánto debe aportar cada agricultor para pagar al peón, si en total deben pagarle 140 soles?

a) 130 ; 10 b) 130 ; 20
c) 110 ; 30 d) 90 : 50
e) 135 ; 5

27. Tres hermanos x, y, z debían repartirse una herencia de M dólares proporcionalmente a sus edades que son : b del hermano x, (b – 3) del hermano y, (b – 6) del hermano z.
Como el reparto se realizó un año después, uno de ellos quedó perjudicado en J dólares.
Indicar la herencia M y el hermano beneficiado.

a) (b – 1) (b – 2) J , y
b) (b – 3) (b – 2) J , z
c) (b – 1) (b – 5) J, x
d) (b – 2) (b – 6) J , y
e) (b – 3) (b – 5) J , z

28. Dos campesinos poseen Am^2 y Bm^2 de terrenos de cultivo, respectivamente; siendo B = 4A. Cuando al primero le falta $\frac{2}{5}$ y al segundo $\frac{4}{5}$ para terminar de labrar sus terrenos, acuerdan contratar un peón por 360 y terminar el resto del trabajo entre los tres en partes iguales. Al final, el campesino del terreno A aduce que no debe pagar, y, al contrario, reclama un pago al campesino del terreno B.
¿Cuánto es el pago que reclama?

a) 120 b) 80 c) 320
d) 180 e) 240

29. Cuatro hermanos reciben una herencia que la reparten en cantidades iguales a sus edades; pero, luego, piensa el menor (desfavorecido) : "si yo tuviera la mitad y mis hermanos la tercera, cuarta y sexta parte de lo que nos ha tocado, entonces todos tendríamos cantidades iguales e incluso sobraría S/. 88".
Hallar la edad del mayor de los hermanos.

a) 60 b) 56 c) 50
d) 48 e) 42

30. Un hombre muere dejando, a su esposa embarazada, un testamento de 130000 soles que se repartirá de la siguiente forma :
$\frac{2}{5}$ a la madre y $\frac{3}{5}$ a la criatura si nace varón.
$\frac{4}{7}$ a la madre y $\frac{3}{7}$ a la criatura si nace niña.
Pero, sucede que la señora da a luz un varón y una niña.
Entonces, lo que les toca a la niña y al varón, en ese orden es :

a) 25000 ; 65000 soles.
b) 30000 ; 60000 soles.
c) 35000 ; 55000 soles.
d) 28000 ; 62000 soles.
e) 32000 ; 58000 soles.

31. Una persona ha dado a 3 pobres cantidades de dinero que son proporcionales a: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{5}$ y aún le quedan 26000 soles.
Si la menor cantidad que entregó es S/. 6000
¿Cuánto dinero tenía?

a) S/. 60000 b) S/. 26000
c) S/. 20000 d) S/. 49500
e) S/. 83500

32. Dos individuos emprenden un negocio por 1 año. El primero empieza con \$500 y 7 meses después añade \$200. El segundo empieza con \$600 y 3 meses después añade \$300.
¿Cuánto corresponde, al segundo, de un beneficio de \$3380?

a) \$ 1400 b) \$ 1980 c) \$1600
d) \$ 1440 e) \$ 1880

33. Un aritmético, al morir, dejó a su esposa embarazada una herencia de S/. 27940, condicionándola de la siguiente forma : ella recibirá los $\frac{5}{6}$ de lo que le toque al niño si era varón, pero si nacía niña recibirá los $\frac{7}{9}$ de lo que a ésta le tocaría. Si la esposa del aritmético, al dar a luz, tuvo quintillizos: 2 niños y 3 niñas.
¿Cuánto le correspondió de la herencia a cada niña?

a) 4590 b) 4950 c) 3780
e) 3870 e) 3965

34. Se reparte N en forma DP a los números 3; 4 y 5 y luego se reparte N en forma DP a los consecutivos de dichos números con lo cual una de las partes varía en 80.
Calcule la segunda parte.

a) 360 b) 560 c) 630
d) 960 e) 2880

35. Paco iba a repartir caramelos entre sus hijos y sobrinos, tocándole a cada hijo como 3 y a cada sobrino como 2. Entre sus hijos, repartió 18 caramelos más que entre sus sobrinos, a quienes correspondió 6 caramelos a cada uno. Si en total repartió 162 caramelos.
¿Cuántos hijos tiene Paco?

a) 9 b) 8 c) 7
d) 10 e) 12

36. Un moribundo dejó S/. 290000 a dos sobrinos, tres sobrinas y 5 primos. Advirtiendo que la parte de cada primo debe ser los $\frac{2}{3}$ de la sobrina y la de cada sobrina, $\frac{3}{5}$ de la de un sobrino.
¿Cuánto le toca a cada uno de los herederos?
(Dar como respuesta la parte de una sobrina)

a) S/. 30000 b) S/. 20000
c) S/. 50000 d) S/. 10000
e) S/. 40000

37. Se reparte el número 145800 en partes proporcionales a todos los números pares desde 10 a 98.
¿Cuánto le toca al que es proporcional a 72?

a) S/. 4420 b) S/. 4200 c) S/. 4226
d) S/. 4320 e) S/. 4500

38. El capataz de una hacienda tiene como peones a : A, B y C. Semanalmente reparte S/. 736 entre los que trabajan. En la semana que trabajan A y B, A recibe $\frac{1}{2}$ más que B; y en la semana que trabajan B y C, B recibe $\frac{1}{4}$ menos que C.
¿Cuánto recibe B en la semana que trabajan los tres?

a) S/. 288 b) S/. 256 c) S/. 224
d) S/. 160 e) S/. 192

39. Al repartir un número N en partes proporcionales a las raíces cuadradas de los números 27; 12; 108 e inversamente proporcional a los cuadrados de los números 6; 4 y 12 respectivamente, se obtiene que la primera parte es una fracción de la suma de la segunda y tercera parte.
Halle dicha fracción :

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{3}{2}$

40. Se reparte una cantidad "N" en forma inversamente proporcional a los números : 2; 6; 12; 20; ... ; 380 y se observa que la mayor parte fue 80.
Hallar: "N".

a) 150 b) 151 c) 152
d) 153 e) 154

41. Un padre antes de morir reparte su fortuna entre sus tres hijos, proporcionalmente a los números 14, 12 y 10; luego, cambia de decisión y la reparte, proporcionalmente, a 12, 10 y 8.
Si uno de los hijos tiene ahora S/. 1200 más que al comienzo.
¿A cuánto asciende la herencia?

a) S/. 110000 b) S/. 108000
c) S/. 105000 d) S/. 112000
e) S/. 120000

42. Tres personas se asociaron para establecer un negocio, la primera puso mercaderías y la segunda $\overline{(a-2)a}\times 10^3$ soles. Obtuvieron una ganancia de: $\overline{a(a+1)}\times 10^3$ soles, de los cuales la primera recibía $\overline{(a-3)(a+2)}\times 10^3$ soles y la tercera $\overline{(a-2)}\times 10^4$ soles. Si la cantidad que recibieron la primera y la tercera están en la relación de 4 a 5.
Hallar la cantidad total que pusieron las tres personas.

a) S/. 128000 b) S/. 188000
c) S/. 120000 d) S/. 160000
e) S/. 240000

43. En la puerta de una iglesia se encuentran habitualmente dos mendigos a saber: una pobre, todos los días y, alternando, un ciego y un cojo. Una persona caritativa manda a su hijo con 52 soles y le dice : "Si encuentras a la pobre y al ciego, darás a éste los $\frac{3}{4}$ del dinero y $\frac{1}{4}$ a la mujer; pero si esta ahí el cojo, no le darás más que $\frac{1}{4}$ del dinero y los $\frac{3}{4}$ a la mujer". Por casualidad, aquel día están los tres mendigos en la puerta de la iglesia.
¿Cuánto dará a cada uno, respectivamente, según la mente de su progenitor?

a) 36 , 4 , 12 b) 4 , 36 , 12
c) 4 , 12 , 36 d) 36 , 12 , 4
e) 12 , 36 , 4

44. Dividir el número 1520 en tres sumandos, cuyos cuadrados sean directamente proporcionales a las raíces cúbicas de 24; 375 y 1029 e inversamente proporcionales a $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{36}$ y $\frac{7}{100}$ respectivamente.
¿Cuál será la menor de las partes?

a) 180 b) 200 c) 270
d) 240 e) 300

45. Una persona dispuso que se repartiera S/. 330000 entre sus tres hijos A, B y C en forma inversa a sus edades. A, que tenía 30 años recibió S/. 88000, pero renunció a ello y lo repartió entre los otros dos directamente proporcional a sus edades y de estos S/. 88000 a B le tocó S/. 8000 más que a C.
Hallar la diferencia entre las edades de B y C.

a) 4 años b) 5 años c) 3 años
d) 8 años e) 9 años

46. Dos hermanos se reparten una herencia de la siguiente manera , la quinta parte DP a 2 y 3, los $\frac{2}{5}$ del resto IP a 5 y 3, el resto DP a 5 y 7. Si a uno de los hermanos le tocó S/. 7000 más que al otro, hallar el monto de la herencia.

a) S/. 27500 b) S/. 47500
c) S/. 53000 d) S/. 42500
e) S/. 35000

47. Al repartir 855 en forma directamente proporcional a 3 números impares consecutivos, una de ellas es 315. Hallar cuánto le hubiera correspondido a dicha parte si el reparto se hubiera hecho en forma inversamente proporcional a dichos números.

a) 245,4 b) 254,9 c) 265,7
d) 276,3 e) 255,9

48. Tres hermanos A, B y C disponen de S/. 100 , S/. 120 y S/. 140, respectivamente; mientras que su cuarto hermano D había gastado su dinero. Los hermanos A; B y C acuerdan reunir sus partes y repartir el total entre los cuatro en partes iguales.
El padre, al conocer dicha acción generosa, les entrega a los hermanos A, B y C S/. 360 para que se repartan entre los 3.
¿Cuánto le tocó a C?

a) S/. 120 b) S/. 140 c) S/. 240
d) S/. 230 e) S/. 200

49. Un padre de familia decide repartir 42560 entre sus 4 hijos A, B, C y D. Al hijo A, que tiene 18 años, le tocó 13680, pero renunció a ello y lo repartió entre los otros tres también proporcionalmente a sus edades y, por esta razón, a B le tocó S/. 5760 adicionales y a C le tocó S/. 4320 adicionales a lo que ya habían recibido.
¿Cuál es la edad de C?

a) 12 b) 15 c) 16
d) 10 e) 9

50. Se reparte "N" en forma DP a 2, 3 y 4 e IP a 3, 5 y 7; luego se reparte DP a 3, 5 y 7 e IP a 2, 3 y 4, con lo cual la mayor diferencia entre 2 de las partes del primer reparto, es mayor en 11 unidades que la mayor diferencia entre 2 de las partes del segundo reparto.
Hallar: "N"

a) 13187 b) 11378 c) 11387
e) 13178 e) 11837

51. Se divide 420000 en 21 partes que son directamente proporcionales a 21 números enteros y consecutivos. Si la diferencia entre la mayor y la menor de las partes en que queda dividido 420000 es 8000, hallar la suma de los 21 números consecutivos.

a) 10500 b) 12600 c) 8400
d) 9450 e) 1050

52. Tres hermanos deben repartirse una cierta cantidad DP a sus edades.
Gastan S/. 560 y se reparten el resto de la manera dicha, correspondiendo al primero S/. 2800, al segundo S/. 3600 y al tercero S/. 4800.
¿Cuánto hubiera recibido uno de ellos sin gastar los S/. 560?

a) S/. 1980 b) S/. 2800 c) S/. 3780
d) S/. 5000 e) S/. 4200

53. Se reparte cierta suma DP a los números:
7 ; 14 ; 21 ; ..... ; 350.
Lo que le corresponde al que recibe la trigésima primera cantidad se divide en 3 partes iguales y se obtienen cantidades enteras.
Determinar la cuadragésima quinta cantidad recibida si ésta es la menor posible entera.

a) 35 b) 49 c) 63
d) 27 e) 18

54. Cuatro amigos: A, B, C y D han terminado de almorzar en un restaurante. "Como les dije", explica D, "Yo no tengo ni un centavo; pero repartiré estas 12 manzanas entre ustedes, proporcionalmente a lo que hayan aportado a mi almuerzo".
La cuenta fue de 60 soles, y los aportes de A, B y C al pago de la cuenta fueron de 15; 20 y 25 soles, respectivamente.
Entonces las cantidades de manzanas que les corresponden a A, B y C respectivamente son:

a) 0 ; 4 ; 8 b) 1 ; 4 ; 7 c) 2 ; 4 ; 6
d) 3 ; 4 ; 5 e) 4 ; 4 ; 4

55. Al repartir S/. 1470 directamente proporcional a los números : a; 1 y $\frac{1}{a}$ e inversamente proporcional a los números : b; $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{b}$ (a > b > 2). Siendo "a" y "b" números enteros se observa que las cantidades obtenidas son enteras.
Hallar: (a – b)

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

56. Al repartir (150 . 99! – 3) DP a los números:
$1!2^2$; $2!3^2$; $3!4^2$; .... ; $98!99^2$
La segunda parte es:

a) 27 b) 18 c) 36
d) 45 e) 54

57. Una persona dispuso que se repartiera $ 432000 entre sus tres sobrinos en forma directamente proporcional a sus edades. A uno de ellos, que tenía 24 años, le tocó $ 144000; pero renunció a ello y los repartió entre los otros dos, también proporcional-mente a sus edades. Por lo que a uno de ellos le correspondió $ 54000 adicionales.
Determinar la edad del menor de los sobrinos.

a) 24 años b) 30 años c) 18 años
d) 16 años e) 12 años

58. Se reparte:
$$N = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{c}+c\right)$$
En 3 partes DP a : a ; $\frac{1}{a}$ y 1; e IP a : b · c, $\frac{b}{c}$ y $\frac{a\cdot c}{b}$ respectivamente. Si la menor de las partes es (c – 2,5), determinarla numéricamente sabiendo que es la segunda.

a) 5 b) 2,5 c) 3,5
d) 4,5 e) 5,5

59. El padre de tres hermanos de: 2, 6 y X años (X > 6), quería repartir la herencia en forma directamente proporcional a las edades. Pero, la repartición se hizo en forma inversamente proporcional. Preguntando al segundo; sobre éste nuevo reparto, éste respondió: "Me da igual".
¿En qué parte de la herencia se perjudicó el mayor?

a) $\frac{9}{13}$ b) $\frac{1}{13}$ c) $\frac{8}{13}$
d) $\frac{10}{13}$ e) $\frac{11}{13}$

60. Luis, César y José forman una sociedad. El capital de Luis es al capital de César como 1 es a 2 y el capital de César es al capital de José como 3 es a 2. A los 5 meses de iniciado el negocio, Luis tuvo que viajar y se retiró del negocio; 3 meses después, César también se retiró del negocio y 4 meses después José liquidó el negocio repartiendo las utilidades. Si Luis hubiese permanecido en el negocio un mes más, habría recibido S/. 64 más. ¿Cuál fue la utilidad total obtenida en el negocio?

a) S/. 2436 b) S/. 5635
c) S/. 3429 d) S/. 2812
e) S/. 6500

Claves

01.	a
02.	c
03.	c
04.	d
05.	e
06.	d
07.	e
08.	a
09.	a
10.	e
11.	b
12.	e
13.	a
14.	a
15.	a
16.	e
17.	e
18.	e
19.	d
20.	a
21.	c
22.	e
23.	d
24.	a
25.	c
26.	a
27.	b
28.	e
29.	d
30.	b

31.	d
32.	b
33.	b
34.	d
35.	d
36.	a
37.	d
38.	e
39.	a
40.	c
41.	b
42.	c
43.	e
44.	d
45.	a
46.	e
47.	e
48.	e
49.	a
50.	c
51.	e
52.	c
53.	d
54.	a
55.	a
56.	a
57.	c
58.	b
59.	c
60.	d

Capítulo

8 REGLA DE TRES

INTRODUCCIÓN

Una de las aplicaciones de proporcionalidad más antigua es la Regla de Tres que resulta al comparar dos o más magnitudes.
Cuando cuatro cantidades forman una proporción y una de ellas es desconocida, la operación que tiene por objeto determinar esta incógnita en función de las cantidades conocidas lleva el nombre de Regla de Tres Simple.

REGLA DE TRES SIMPLE

Es cuando se comparan dos magnitudes proporcionales. Pueden ser directas o inversas.

1. ***Directa:*** Cuando las magnitudes comparadas son directamente proporcionales.

Esquema:

1era. magnitud 2da. magnitud

a ——— b
x ——— c

Si son magnitudes directamente proporcionales se cumple :

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{c} \rightarrow \boxed{bx = ac}$$

Ejemplo:
Un grifo arroja en 12 minutos 640 litros de agua. ¿Cuántos litros arrojará en 75 minutos?

Resolución:

Minutos # litros

12 ——— 640
75 ——— x Es una R3SD

12x = 75(640)

$\boxed{x = 4000 \text{ l}}$

2. ***Inversa:*** Cuando las magnitudes comparadas son inversamente proporciona-les :

Esquema:

1era. magnitud 2da. magnitud

a ——— b
x ——— c

Si son magnitudes inversamente proporcionales se cumple :

$$\boxed{a \cdot b = x \cdot c}$$

Ejemplo:
24 sastres pueden hacer un trabajo en 30 días, ¿Cuántos sastres habrá que aumentar para hacer dicho trabajo en 20 días?

Resolución

Sastres días

24 ——— 30
x ——— 20 Es una R3SI

20x = 30(24)

$\boxed{x = 36}$

Entonces hay que aumentar 36 – 24 = 12 sastres

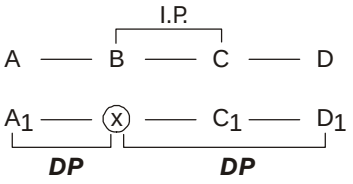
REGLA DE TRES COMPUESTA

Es cuando se comparan más de dos magnitudes es decir al menos 3 magnitudes (6 valores correspondientes)

Método de las proporciones:

I. Trasladar la información a la hoja de cálculo.
II. Se ubica la magnitud de la incógnita, la cual se compara con c/u de las otras magnitudes (deberá considerar que las otras magnitudes que no intervienen permanecen constantes)
III. En caso que la comparación determine que las magnitudes son DP, cambie la posición de los valores, escribiéndolos como una fracción.
IV. En caso que la comparación determine que las magnitudes son IP, mantenga la posición original de los valores (en fracción).

V. La incógnita se determina del siguiente modo:



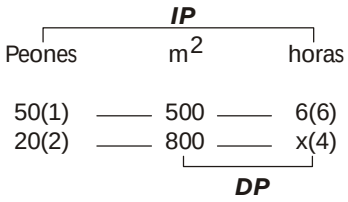
Se cumple :

$$\frac{x}{B} = \frac{A_1}{A} \cdot \frac{C}{C_1} \cdot \frac{D_1}{D}$$

Aplicación 1:

50 peones siembran un terreno de $500m^2$ de superficie en 6 días de 6h/d; entonces, el número de días que necesitan 20 peones doblemente rápidos para sembrar un terreno de $800m^2$ de superficie trabajando 4h/d es:

Resolución:



Luego:

$$\frac{4x}{36} = \frac{5\cancel{0}}{4\cancel{0}} \cdot \frac{\cancel{800}}{\cancel{500}}$$

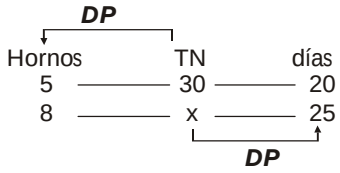
$$x = \frac{36(5)(8)}{4(4)(5)}$$

$$\boxed{x = 18 \text{ días}}$$

Aplicación 2:

5 hornos consumen 30 toneladas de carbón en 20 días; 3 hornos más consumirán en 25 días una cantidad de carbón igual a :

Resolución:



Se cumple:

$$\frac{x}{30} = \frac{8}{5} \cdot \frac{25}{20}$$

$$\boxed{x = 60 \text{ TN}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Se sabe que "h" hombres tienen víveres para "d" días. Si estos víveres deben alcanzar para "4d" días. ¿Cuántos hombres deben retirarse?

a) $\frac{h}{3}$ b) $\frac{h}{4}$ c) $\frac{2h}{5}$
d) $\frac{3h}{5}$ e) $\frac{3h}{4}$

02. Ángel es el doble de rápido que Benito y la tercera parte que Carlos. Si Ángel hace una obra en 45 días, ¿En cuántos días harán la obra los 3 juntos?

a) 10 b) 12 c) 15
d) 20 e) 25

03. 16 obreros pueden hacer una obra en 38 días, ¿En cuántos días harán la obra si 5 de los obreros aumentan su rendimiento en un 60%?

a) 28 b) 29 c) 30
d) 31 e) 32

04. Un sastre pensó hacer un terno en una semana; pero tardó 4 días más por trabajar 4 horas menos cada día. ¿Cuántas horas trabajó diariamente?

a) 11 b) 7 c) 8
d) 14 e) 22

05. Doce hombres se comprometen a terminar una obra en 8 días. Luego de trabajar 3 días juntos, se retiran 3 hombres.
¿Con cuántos días de retraso terminan la obra?

a) $1\frac{1}{4}$ días b) $1\frac{2}{3}$ días c) $2\frac{1}{3}$ días
d) 1 día e) 2 días

06. Un burro atado a una cuerda de 3 metros de longitud tarda 5 días en comer todo el pasto que está a su alcance. Cierto día, su dueño lo amarra a una cuerda más grande y se demora 20 días en comer el pasto que está a su alcance.
Hallar la longitud de la nueva cuerda.

a) 4m. b) 5m. c) 6m.
d) 12m. e) 18m.

07. Para cosechar un campo cuadrado de 18m. de lado se necesitan 12 días.
¿Cuántos días se necesitan para cosechar otro campo cuadrado de 27m. de lado?

a) 18 b) 20 c) 22
d) 27 e) 30

08. Si en 80 litros de agua de mar existen 2 libras de sal, ¿Cuánta agua pura se debe aumentar a esos 80 litros para que en cada 10 litros de la mezcla exista $\frac{1}{6}$ de libra de sal?

a) 20 b) 35 c) 40
d) 60 e) 50

09. Una enfermera proporciona a un paciente una tableta cada 45 minutos.
¿Cuántas tabletas necesitará para 9 horas de turno si debe administrar una al inicio y al término del mismo?

a) 12 b) 10 c) 14
d) 13 e) 11

10. Una ventana cuadrada es limpiada en 2h. 40min. Si la misma persona limpia otra ventana cuadrada cuya base es 25% menor que la ventana anterior, ¿Qué tiempo demora?

a) 80 min b) 92 min
c) 1h 20min d) 1h 40min
e) 1h 30min

11. Si "A" obreros realizan una obra en $\left(\frac{3x}{2}+4\right)$ días.
¿En cuántos días $\frac{A}{2}$ obreros realizarán la misma obra?

a) 3(x 2) b) 3x – 2 c) 3x + 8
d) $\frac{3x}{8}+8$ e) 3x – 8

12. Un sastre tiene una tela de 86 m. de longitud que desea cortar en pedazos de un metro cada uno. Si para hacer cada corte se demora 6 segundos, el tiempo que demorará en cortar la totalidad de la tela es: (en minutos).

a) 8,5 b) 8,6 c) 8,4
d) 8,7 e) 8,3

13. Manuel es el triple de rápido que Juan y juntos realizan una obra en doce días. Si la obra la hiciera solamente Manuel, ¿Cuántos días demoraría?

a) 20 b) 16 c) 18
d) 14 e) 48

14. Un albañil ha construido una pared en 14 días. Si hubiera trabajado 3 horas menos, habría empleado 6 días más para hacer la misma pared.
¿Cuántas horas ha trabajado por día?

a) 6 h b) 7 h c) 9 h
d) 10 h e) 8 h

15. Un reloj se atrasa 10 minutos cada día.
¿En cuántos días volverá a marcar la hora correcta?

a) 36 b) 72 c) 120
d) 132 e) 144

16. Si en 120 kilos de aceite compuesto comestible hay 115 kilos de aceite de soya y el resto de aceite puro de pescado; ¿Cuántos kilos de aceite de soya se deberá agregar a estos 120 kilos para que por cada 5 kilos de la mezcla se tenga $\frac{1}{8}$ de kilo de aceite puro de pescado?

a) 20 b) 40 c) 80
d) 120 e) 100

17. En un fuerte hay 1500 hombres provistos de víveres para 6 meses.
¿Cuántos habrá que despedir, para que los víveres duren dos meses más, dando a cada hombre la misma ración?

a) 360 b) 375 c) 340
d) 350 e) 320

18. A una esfera de reloj se le divide en 1500 partes iguales, a cada parte se denominará "nuevo minuto". Cada "nueva hora", está constituida por 100 "nuevos minutos".
¿Qué hora indicará el nuevo reloj, cuando el antiguo indique las 3 horas, 48 minutos?

a) 2h 80min b) 2h 45min
c) 3h 75min d) 4h 75min
e) 3h 80min

19. Un grupo de 6 alumnos resuelve en 5 horas una tarea consistente en 10 problemas de igual dificultad. La siguiente tarea consiste en resolver 4 problemas cuya dificultad es el doble que la de los anteriores. Si no se presentan dos integrantes del grupo, entonces los restantes alumnos terminarán la tarea en:

a) 4 h b) 6 h c) 7,5 h
d) 8 h e) 10 h

20. Las máquinas "M_1" y "M_2" tienen la misma cuota de producción semanal, operando 30 horas y 35 horas respectivamente. Si "M_1" trabaja 18 horas y se malogra debiendo hacer "M_2" el resto de la cuota.

¿Cuántas horas adicionales debe trabajar "M_2"?

a) 12 h b) 14 h c) 16 h
d) 18 h e) 20 h

21. Si 10 obreros pueden hacer un trabajo en 24 días, ¿Cuántos obreros, que tengan un rendimiento igual a la mitad, se necesitarán para hacer un trabajo 7 veces mayor en un tiempo $\frac{1}{6}$ del anterior?

a) 640 b) 500 c) 900
d) 840 e) 960

22. El comandante de una fortaleza tiene 1500 hombres y víveres para un mes, cuando recibe la orden de despedir un cierto número de soldados para que los víveres duren 4 meses dando a cada soldado $\frac{3}{4}$ de ración.
¿Cuántos soldados serán dados de baja por el comandante?

a) 1000 b) 1500 c) 2000
d) 3000 e) 100

23. Una cuadrilla de 30 obreros pueden hacer una obra en 12 días, ¿Cuántos días serán necesarios para otra cuadrilla de 20 obreros, de doble eficiencia que los anteriores, para hacer la misma obra?

a) 6 b) 7 c) 8
d) 9 e) 10

24. Un reservorio cilíndrico de 8m. de radio y 12m. de altura, abastece a 75 personas durante 20 días.
¿Cuál deberá ser el radio del recipiente de 6m. de altura que abastecería a 50 personas durante 2 meses?

a) 8 b) 24 c) 16
d) 18 e) 11

25. Una mecanógrafa escribe 125 páginas de 36 líneas y 11 palabras cada línea, en 5 días.
¿Cuántas páginas escribirá en 6 días, si cada página es de 30 líneas y cada línea tiene 12 palabras?

a) 165 b) 145 c) 135
d) 155 e) 115

26. 5 cocinas necesitan 5 días para consumir 5 galones de kerosene.
¿Cuántos galones consumía una cocina en 5 días?

a) 10 b) 1 c) $2\frac{1}{2}$
d) $\frac{1}{2}$ e) 5

27. Si una tubería de 12 cm. de radio arroja 360 litros por minuto.
¿Qué tiempo se empleará para llenar un depósito de $192m^3$ con otra tubería de 16 cm. de radio?

a) 400 min b) 360 min c) 300 min
d) 948 min e) Más de 400 min

28. Una fábrica dispone de 3 máquinas de 70% rendimiento y produce 3200 envases cada 6 jornadas de 8 horas. Con el fin de reducir personal, se cambian las máquinas por otras 9 del 90% de rendimiento que producen 7200 envases en 4 jornadas de "n" horas. Hallar "n"

a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9

29. En 12 días, 8 obreros han hecho las $\frac{2}{3}$ partes de una obra. Se retiran 6 obreros.
¿Cuántos días demorarán los obreros restantes para terminar la obra?

a) 36 días b) 12 días c) 48 días
d) 24 días e) 15 días

30. En Piura, por problemas de los huaycos, un pueblo "A" con 16000 habitantes ha quedado aislado y sólo tienen víveres para 24 días a tres raciones diarias por cada habitante. Si el pueblo "A" socorre a otro pueblo "B" con 2000 habitantes y sin víveres.
¿Cuántos días durarán los víveres para los dos pueblos juntos si cada habitante toma dos raciones diarias?
Considerar que llegará una "ayuda" de la capital 30 días después que A y B iniciaran el compartimiento de víveres:

a) Los víveres se terminaron antes de llegar la ayuda.
b) Los víveres durarán 30 días.
c) Los víveres durarán hasta 1 día después de llegar la ayuda.
d) Los víveres durarán hasta 2 días después de llegar la ayuda.
e) Faltan datos para poder hacer el cálculo.

31. Un reloj se adelanta minuto y medio cada 24 horas. Después de 46 días 21 horas 20 minutos.
¿Cuánto se adelantó el reloj?

a) 1h 10min 20s b) 1h 20min
c) 1h 20min 20s d) 1h 30min
e) 1h 30min 20s

32. Quince obreros han hecho la mitad de un trabajo en veinte días.
En ese momento abandonan el trabajo 5 obreros.
¿Cuántos días tardarán en terminar el trabajo los obreros que quedan?

a) 24 b) 26 c) 28
d) 30 e) 32

33. Si N es el número de obreros que pueden hacer una obra en $\left(\frac{3}{4}\right)N$ días trabajando $\left(\frac{1}{3}\right)N$ horas diarias.
¿Cuál es el número N de obreros si al duplicarse hacen la misma obra en 72 horas?

a) 12 b) 24 c) 36
d) 48 e) 60

34. Un reloj marca la hora a las 0 horas de un cierto día. Si se sabe que se adelanta 4 minutos cada 12 horas, ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que, nuevamente, marque la hora exacta?

a) 90 días b) 8 semanas
c) 9 días d) 36 días
e) 36 horas

35. 80 obreros, trabajando 8 horas diarias, construyen $480m^2$ de una obra en 15 días.
¿Cuántos días se requieren para que 120 obreros, trabajando 10 horas diarias, hagan $960m^2$ de la misma obra?

a) 22 días b) 30 días c) 18 días
d) 16 días e) 20 días

36. Un súper panetón en forma de paralelepípedo pesa 2160 gramos. El peso en gramos de un minipanetón de igual forma; pero con sus dimensiones reducidas a la tercera parte es:

a) 40 b) 50 c) 60
d) 70 e) 80

37. Un reloj marca la hora correcta un día las 6 p.m. Suponiendo que cada doce horas se adelante 3 minutos. ¿Cuánto tiempo pasará para que marque por primera vez la hora correcta nuevamente?

a) 10 días b) 12 días c) 72 días
d) 120 días e) 240 días

38. Un fusil automático puede disparar 7 balas por segundo.
¿Cuántas balas disparará en un minuto?

a) 420 b) 530 c) 120
d) 361 e) 480

39. Un obrero puede hacer un panel de concreto en 2 horas 35 minutos. ¿Cuánto tiempo se demora el mismo obrero para hacer otro panel cuyas dimensiones son 2 veces mayor, un quinto más y un sexto de los anteriores?

a) 10min 20s b) 1h 33min
c) 1h 2min d) 5h 10min
e) 3h 45min

40. Un reloj se atrasa 8 minutos cada 24 horas. Si este marca la hora correcta 7 a.m. el 2 de mayo.
¿Qué hora marcará a la 1 p.m. del 7 de mayo?

a) 11h 18min b) 12h 8min
c) 11h 40min d) 12h 42min
e) 12h 18min

41. Una obra debía terminarse en 30 días empleando 20 obreros, trabajando 8 horas diarias. Después de 12 días de trabajo, se pidió que la obra quedase terminada 6 días antes de aquel plazo y así se hizo.
¿Cuántos obreros se aumentaron teniendo presente que se aumentó también en dos horas el trabajo diario?

a) 4 b) 24 c) 44
d) 0 e) 20

42. Durante la construcción de las torres de San Borja, una cuadrilla de 20 hombres trabajó durante 30 días a 6 horas diarias para levantar un edificio de 25m. de altura, 12m. de largo y 10m. de ancho. Al terminar este edificio, la cuadrilla con 4 hombres menos, pasó a construir otro de 20m. de alto, 14m. de largo y 10m. de ancho trabajando 7h por día y con el doble de dificultad. ¿Cuántos días necesitaron para concluirlo?

a) 15 b) 30 c) 45
d) 60 e) 75

43. Cuando se instaló agua a una población, correspondió a cada habitante 60 litros de agua por día. Ahora que la población ha aumentado en 40 habitantes, corresponde a cada uno de ellos 58 litros de agua por día. Hallar la población actual.

a) 1000 b) 1100 c) 1200
d) 900 e) 800

44. Se sabe que 30 carpinteros en 6 días pueden hacer 90 mesas o 150 sillas. Hallar x, sabiendo que 20 de éstos carpinteros en 15 días han hecho 120 mesas y "x" sillas.

a) 50 b) 42 c) 48
d) 36 e) 30

45. Si 9 hombres hacen una obra de 15m. de ancho por 16 pies de alto en 8 días trabajando 10 horas diarias. ¿En cuánto deberá variar el ancho de la obra para que 10 hombres, de 20% de rendimiento menos que los anteriores, hagan una obra que es de doble dificultad que la anterior y de 20 pies de alto, si demoran 5 días trabajando 6 horas diarias?

a) Disminuye en 12m. b) Disminuye en 10m.
c) Disminuye en 13m. d) Aumenta en 10m.
e) Aumenta en 12m.

46. Un grupo de 15 hombres trabajando 8 días pueden hacer el 40% de una obra, otro segundo grupo de 20 hombres trabajando 6 días, pueden hacer el 50% de la misma obra. Si 3 hombres del 2do, pasan al 1er. grupo, determinar qué porcentaje de la obra harían en 4 días estos 18 hombres juntos.

a) 20% b) 22% c) 23%
d) 24% e) 25%

47. 4 obreros trabajando 10 horas diarias han empleado 12 días para hacer una zanja de 400 metros de largo, 2 metros de ancho y 1,25 metros de profundidad.
¿Cuántos días emplearán 24 obreros trabajando 8 horas diarias al abrir otra zanja de 200 metros de largo, 3 metros de ancho y 1 metro de profundidad?

a) 5 días más b) 12 días más
c) 6 días más d) 3 días más
e) 1,5 días más

48. 2 hombres y 8 muchachos pueden hacer una obra en 15 días, mientras que un hombre y 2 muchachos hacen la misma obra en 45 días.
Un solo muchacho, ¿en qué tiempo haría la misma obra?

a) 90 días b) 120 días c) 180 días
d) 150 días e) 60 días

49. Doce costureras pueden hacer un tejido en 23 días trabajando 3 horas diarias.
Después de 5 días se retiran 2 costureras y 6 días después de esto se contratan x costureras adicionales, para terminar a tiempo.
Hallar el valor de x.

a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

50. Un obrero demora 8 horas para construir un cubo compacto de 5dm. de arista.
Después de 108 horas de trabajo, ¿Qué parte de un cubo de 15dm. de arista habrá construido?

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{1}{8}$ e) $\frac{1}{5}$

51. Si 40 obreros, trabajando 8 horas diarias, construyen 320m. de una obra en 10 días, los días que usaron 55 obreros trabajando 6 horas diarias y haciendo 440 m. de la misma obra son:

a) $\frac{1}{13}$ días b) 13,1 días c) 13 días
d) 12 días e) $13\frac{1}{3}$ días

52. Para realizar una obra, se cuenta con dos cuadrillas. La primera tiene cierta cantidad de obreros y puede ejecutar la obra en 4 días; la segunda cuenta con un número de obreros, diferente del anterior y puede concluir la obra en 15 días. Si se emplea $\frac{1}{3}$ de la primera y $\frac{1}{4}$ de la segunda, ¿En cuánto tiempo terminaron la obra?

a) 12 b) 10 c) 15
d) 8 e) 18

53. Una cuadrilla de 22 obreros, trabajando 5 horas diarias, ha empleado 6 días para abrir una zanja de 220 m. de largo, 1 m. de ancho y 0,625m. de profundidad.
¿Cuántos días más empleará otra cuadrilla de 12 obreros, trabajando 4 horas diarias, para hacer otra zanja de 100m. de largo, 1,5m. de ancho y 1m. de profundidad?

a) 5 b) 4 c) 9
d) 3 e) 2

54. Se tienen dos depósitos con líquidos de la misma naturaleza; pero de precios diferentes. El primero contiene "A" litros y el segundo "B" litros. Se saca de cada uno la misma cantidad y se echa en el primero lo que se saca del segundo y recíprocamente.
¿Qué cantidad ha pasado de un depósito al otro, si el contenido de los dos ha resultado de la misma calidad?
Obs:

$MH(A;B)=\frac{2AB}{A+B}$ $MG(A;B)=\sqrt{AB}$

$MA(A;B)=\frac{A+B}{2}$

a) $\frac{1}{2}MH(A;B)$ b) MH (A ; B)
c) MA (A ; B) d) MG (A ; B)
e) MA (A ; B) + MH (A ; B)

55. Si 18 gallinas ponen 18 decenas de huevos en 18 días y 12 gallinas comen 12 kg de maíz en 12 días, ¿Cuánto será el costo del alimento necesario para que 20 gallinas pongan 20 decenas de huevos, si el kilogramo de maíz cuesta 8 soles?

a) S/. 250 b) S/. 240 c) S/. 225
d) S/. 200 e) S/. 180

56. Una obra se inicia con un grupo de obreros. Cada día que pasa, los obreros disminuyen su rendimiento un 5% del rendimiento que tenían el primer día. Acabaron la obra cuando su rendimiento era 50% del original.
¿Cuántos días menos habrían empleado si no hubieran bajado el rendimiento de cada uno de los obreros?

a) 1,5 días b) 1,75 días c) 2,75 días
d) 3 días e) 2,5 días

57. Se contrataron 25 obreros para que terminen una obra en 21 días trabajando 8 horas diarias. Luego de 6 días, se acordó que la obra quede terminada 5 días antes del plazo establecido, ¿Cuántos obreros más se tuvieron que contratar sabiendo que se incrementó en 2h el trabajo diario?

a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 30

58. 10 peones se demoraron 15 días de 7h/d de trabajo en sembrar un terreno de 25m de largo por 2m de ancho. ¿Cuántos días de 8 horas diarias de trabajo se demorarán en sembrar otro terreno de 40m de largo por 2m de ancho 15 peones doblemente hábiles?

a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9

59. Un grupo de "n" obreros se comprometen en terminar una obra en cierto tiempo. Luego de algunos días paralizan las labores por 2 días, al cabo de los cuales se reincorporan 14 obreros más, los cuales apoyaron por 3 días y se consiguió terminar el trabajo en el plazo fijado.
Calcular: "n"

a) 14 b) 17 c) 19
d) 21 e) 24

60. Cuatro obreros y dos ayudantes pueden y deben realizar una obra en 20 días trabajando 8 horas por día. Si al cabo de 8 días, se incrementan en 2 el número de obreros y en 4 el número de ayudantes y se decide reducir en 1 hora la jornada diaria.
¿Cuántos días antes culminarán dicha obra, si el rendimiento de cada obrero es el triple del de cada ayudante?

a) 8 b) 6 c) 4
d) 12 e) 16

Claves

01.	e
02.	a
03.	e
04.	b
05.	b
06.	c
07.	d
08.	c
09.	d
10.	e
11.	c
12.	a
13.	b
14.	d
15.	b
16.	c
17.	b
18.	d
19.	b
20.	b
21.	d
22.	a
23.	d
24.	c
25.	a
26.	b
27.	c
28.	c
29.	d
30.	d

31.	a
32.	d
33.	b
34.	a
35.	d
36.	e
37.	d
38.	d
39.	b
40.	e
41.	a
42.	d
43.	c
44.	a
45.	c
46.	e
47.	e
48.	c
49.	b
50.	c
51.	e
52.	b
53.	c
54.	a
55.	b
56.	c
57.	a
58.	c
59.	d
60.	c

Capítulo

9 TANTO POR CUANTO

INTRODUCCIÓN

"En la inauguración de un centro comercial, se ofrece un artículo en $ 300, con dos descuentos sucesivos del 30 por 70 y el 11 por 25. Podría Ud. decirnos ¿A qué precio lo puedo comprar?"

Una de las aplicaciones más utilizadas de la proporcionalidad es el porcentaje, que tiene su origen en el tanto por ciento.

Es muy frecuente escuchar estas expresiones:

* Banco del Porvenir ofrece a sus clientes una tasa de ahorros del 25% (Veinticinco por ciento) anual.
* La inflación acumulada en los últimos ocho meses llega al 20% (Veinte por ciento).
* La tasa de mortalidad, en niños menores de 1 año, alcanza el 10% (Diez por ciento).

Pero ... ¿Qué significan las palabras "por ciento"?

Significan una cierta parte de cada ciento de una cantidad cualquiera. Así el 4 por ciento significa 4 de cada 100 y puede ser 4 soles de cada 100 soles, 4 kilos de cada 100 kilos, 4 personas de 100 personas y se puede escribir.

$$\frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

Cuando la parte fraccionaria de un total se expresa en centésimas, se dice que es un porcentaje del total. La palabra porcentaje se emplea para referirse al método del cálculo por cientos.

TANTO POR CUANTO

El 5 por 8 de una cantidad, significa dividir dicha cantidad en 8 partes iguales y tomar 5 de ellas.

Ejemplo:

El 5 por 8 de 120.

8 partes iguales

120 lo dividimos en 8 partes iguales, tomando 5 de ellas o

sea: $5\left(\frac{120}{8}\right) = \frac{5}{8} \times 120 = 75$

Es decir, el A por B de N es:

$$\boxed{\frac{A}{B} \cdot N}$$

Cuando B = 100 se lee A por 100 de N y se denota por A% de N y se escribe:

$$\boxed{\frac{A}{100} \cdot N}$$

Ejemplo:

El 20% de 75 es:

$$\underbrace{\frac{20}{100}}_{\text{Tanto por ciento}} \cdot 75 = \underbrace{15}_{\text{Porcentaje}}$$

Tanto por ciento expresado en fracción:

* 10% ..... $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$
* 25% ..... $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$
* 50% ..... $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$
* 100% ..... $\frac{100}{100} = 1$

Un número racional en tanto por ciento:

* $\frac{3}{4}$ ..... $\frac{3}{4} \cdot 100\% = 75\%$
* $\frac{6}{5}$ ..... $\frac{6}{5} \cdot 100\% = 120\%$
* 4 ..... $4 \cdot 100\% = 400\%$

Observación : Es muy frecuente aplicar Regla de Tres Simple para problemas de tanto por ciento.

Ejemplo:

¿De qué número; 92 es el 15% más?

Resolución:

El número representa el 100%, entonces el 15% más, será : 100% + 15% = 115%

Es decir:

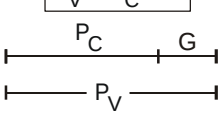
$$92 \text{ ——— } 115\%$$
$$x \text{ ——— } 100\%$$
$$x = \frac{92(100\%)}{115\%} = 80 \quad \textbf{\textit{Rpta}}$$

ASUNTOS COMERCIALES

1. Se compra un artículo en P_C ; para luego venderlo en P_V entonces:

I. Si $P_V > P_C$ hay ganancia y se cumple:

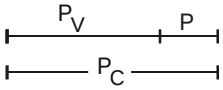
$$\boxed{P_V = P_C + G}$$



G : Ganancia ó Utilidad

II. Si $P_V < P_C$ hay pérdida y se cumple:

$$\boxed{P_V = P_C - P}$$



P : Pérdida

2. Generalmente, al realizar un negocio, que nos va a dar una utilidad, ocasiona gastos (movilidad, alquiler, viáticos, etc.), entonces se cumple:

$$\boxed{G_{bruta} = G_{neta} + gastos}$$

3. Al precio fijado para la venta de un artículo se le llama ***Precio de Lista*** al cual casi siempre se le hace una rebaja y por consiguiente se cumple:

$$\boxed{P_L - R = P_V}$$

Importante: Generalmente, los aumentos se realizan sobre el precio de costo; mientras que los descuentos se hacen sobre el precio de lista.

OPERACIONES FRECUENTES

I. a%N + b%N = (a + b)%N

Ejemplo:
15%(60) + 25%(60) = 40%(60) = 24

II. a%N - b%N = (a – b)%N

Ejemplo:
72%(30) - 37%(30) es:
35%(30) = 10,5

III. n(a%N) = (na)%N

Ejemplo:
15(2% de 40) = 30% de 40 = 12

AUMENTOS SUCESIVOS

Aplicación: Dos aumentos sucesivos del 30% y 40%. ¿A qué aumento único equivalen?

Resolución:

Cantidad inicial : N; le aumentamos el 30%, obtenemos: 100%N + 30%N = 130%N
al cual le aumentamos el 40%, para obtener el (100% + 40%) del 130%N.

Es decir, al final tengo:

$$\frac{140}{100}(130\%N) = 182\%N$$

Aumento único. 182%N – 100%N = 82%N

Método Práctico:
Aumento: +30% ; +40%

Nueva cantidad: $\frac{13\cancel{0}}{10\cancel{0}} \cdot 140\% = 182\%$

Aumento único: 182% - 100% = 82%

DESCUENTOS SUCESIVOS

Aplicación: Dos descuentos sucesivos del 30% y 12%. ¿A qué descuento único equivalen?

Resolución:
Cantidad inicial : N, le descontamos el 30%, queda 100%N - 30%N = 70%N
Volvemos a descontar el 12% pero al 70%N entonces obtenemos:

$$\frac{88}{10\cancel{0}}(7\cancel{0}\%)N = 61{,}6\%N$$

Descuento único = 100%N - 61,6%N
= 38,4%N

Método Práctico:

Descuentos : - 30% ; - 12%
Queda : 70% . 88%

$$\frac{7\cancel{0}}{10\cancel{0}} \cdot 88\% = 61{,}6\%$$

Descuento único: 100% – 61,6% = 38,4%

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. El $(x - 1)\%$ de $(x + 36)$ es $\frac{2x}{5}$.

El valor de x es:

a) 16 b) 9 c) 4
d) 5 e) 7

02. El 40% del 50% de x es el 30% de y.
¿Qué porcentaje de $2x + 7y$ es $x + y$?

a) 25% b) 12.5% c) 20%
d) 10% e) 22.5%

03. El excedente del dinero de A sobre el dinero de B equivale al 20% del dinero de C y el exceso de B sobre el de C equivale al 10% del dinero de A. Si A tiene S/. 2.000, ¿Cuánto tiene B?

a) 1200 b) 1580 c) 1700
d) 1500 e) 1680

04. A es el 25% de C y B es el 40% de C, ¿Qué parte de B es A?

a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{32}{8}$ c) $\frac{8}{5}$
d) $\frac{8}{3}$ e) $\frac{1}{2}$

05. Un propietario dispone que cada dos años el alquiler de su casa aumenta en un 10% del monto correspondiente al periodo inmediato anterior.
Si al comienzo del quinto año debe recibir 6050 soles, ¿Cuánto fue el alquiler inicial?

a) S/. 4800 b) S/. 5500 c) S/. 5045
d) S/. 5000 e) S/. 49000

06. Si A es el 10% de la suma de C y D; además, C representa el 20% de la suma de A y D. Calcular A : C

a) 12 : 11 b) 6 : 11 c) 6 : 7
d) 11 : 12 e) 11 : 6

07. En una caja hay "x" bolas de las cuales 25% son blancas y el 75% son rojas. Si se duplica las blancas, ¿Cuál es el porcentaje de las rojas respecto del total?

a) 45% b) 50% c) 40%
d) 60% e) 25%

08. El 30% de qué número es el 30% del 10% de 800.

a) 0.8 b) 800 b) 0.08
d) 80 e) 24

09. En una industria, se ha fabricado 1000 productos; el 60% de ellos han sido fabricados por la máquina A y el resto por la máquina B. Si se sabe que el 5% de lo fabricado por A son defectuosos y el 4% por B, ¿Cuántos defectuosos hay en los 1000 productos?

a) 50 b) 90 c) 45
d) 46 e) 40

10. ¿Qué tanto por ciento de 1 es 0.2?

a) 2% b) 1.5% c) 20%
d) 5% e) 0.2%

11. Una bolsa contiene bolas rojas, negras y blancas. El 20% son rojas, el 35% son negras y hay 36 bolas blancas.
El número de bolas que contiene la bolsa es:

a) 70 b) 65 c) 80
d) 75 e) 90

12. Si el sueldo de Alberto fuese aumentado en 10%, le alcanzaría para comprar 20 camisetas, ¿cuántas camisetas podría comprar si el aumento fuese de 21%?

a) 22 b) 25 c) 21
d) 30 e) 24

13. En un salón de clase 70% son hombres. Si falta el 25% de las mujeres y sólo asisten 18 mujeres, ¿Cuál es el total de alumnos del salón?

a) 90 b) 75 c) 80
d) 150 e) 120

14. El gerente de ventas de cierta compañía reduce su promedio de producción en N%. Si el promedio final fue T, entonces el promedio original fue:

a) $\frac{TN}{100}$ b) $\frac{(100 - N)}{T}$
c) $\frac{100T}{(100 - N)}$ d) $\frac{T}{(100 - N)}$
e) $\frac{100N}{T}$

15. El 20% de $(x + y)$ es igual al 40% de $(2x - y)$.
¿Qué tanto por ciento representa $(12x + 15y)$ respecto de $(12y - 3x)$?

a) 120% b) 150% c) 300%
d) 200% e) 250%

16. El costo de la mano de obra y las indemnizaciones suman el 40% del valor de una obra. Si las indemnizaciones representan el 60% del importe de la mano de obra.
¿Qué tanto por ciento del valor de la obra importa solamente la mano de obra?

a) 20% b) 24% c) 25%
d) 30% e) 33,3%

17. ¿Cuál es el $\frac{1}{12}\%$ de los $\frac{4}{7}$ de $\frac{3}{13}$ de 91?

a) 1 b) 0,1 c) 0,01
d) 0,001 e) 0,0001

18. El treinta por ciento de la cuarta parte del triple de la mitad de mi propina doné a una institución benéfica. Si mi propina fue de 80,000 soles.
¿Cuál es el monto de la donación?

a) 4500 b) 18000 c) 27000
d) 9000 e) 3000

19. ¿En qué porcentaje total aumentó el sueldo de un trabajador si fue como sigue: el 20% de su sueldo aumentó 50%, otro 30% de su sueldo aumentó 20% y el resto del sueldo aumentó el 10%?

a) 80% b) 70% c) 60%
d) 16% e) 21%

20. Al hallar el 10% del 5% del 9% de un número, se halló por equivocación el 15% del 9% del 7% del mismo número, la cantidad así obtenida es el 9% del valor que se debió obtener, más 9,045.
Hallar el número.

a) 10^3 b) 10^4 c) 10^5
d) 10^6 e) 10^7

21. Un sastre vende dos camisas a 60 soles cada una. En una camisa, gana 25% de su costo y en el otro pierde el 25% de su costo.
¿Ganó o perdió en la venta? ¿Cuánto?

a) Ganó S/. 4 b) Ganó S/. 8
c) Perdió S/. 8 d) Perdió S/. 4
e) No ganó ni perdió

22. ¿Qué porcentaje de la venta se ha ganado cuando se vende en $120.000 lo que ha costado $96.000?

a) 24% b) 22% c) 25%
d) 20% e) 18%

23. Hacer tres descuentos sucesivos del 25%, 40% y 20% equivale a hacer uno de:

a) 28.3% b) 64% c) 75%
d) 85% e) 30%

24. El precio de un artículo se rebaja el 10%. Para volverlo al precio original, el nuevo precio se debe aumentar en:

a) $\frac{100}{9}\%$ b) 9% c) 12%
d) 10% e) 11%

25. Un artículo se vende en S/. 390 ganándose el 30% del costo; por efecto de la inflación el costo ha aumentado en 10%. Para seguir ganando el mismo porcentaje el artículo debe venderse en:

a) S/. 546 b) S/. 339 c) S/. 429
d) S/. 492 e) S/. 465

26. Si gastara el 30% del dinero que tengo, y ganara el 28% de lo que me queda, perdería S/. 156. ¿Cuánto tengo?

a) S/. 3500 b) S/. 2000
c) S/. 1500 d) S/. 1560
e) S/. 2500

27. En una Universidad particular, el departamento de Servicio Social, decide rebajar las pensiones de enseñanza a los estudiantes de menores recursos económicos en un 20% y aumentar un 30% al resto. Si el monto total de las pensiones queda disminuido en un 10% con esta política.
¿Qué porcentaje de la pensión total representa la pensión pagada por los estudiantes de menores recursos económicos?

a) 50% b) 82% c) 79%
d) 80% e) 85%

28. Un comerciante compra al contado un artículo con un descuento del 20% del precio de lista.
¿Qué porcentaje del precio fijado en lista representa el precio de venta del comerciante si él debe ganar el 20% del precio de compra?

a) 95% b) 85% c) 80%
d) 96% e) 94%

29. El ingreso promedio del sector obrero en una empresa es de 300 000 soles mensuales. En el mes en curso hay un incremento de haberes del 10% del haber anterior más una bonificación general de 60 000 soles, pero se decreta un descuento del 5% del haber actualizado, pro fondos de reconstrucción.
El promedio actual es:

a) 366 000 b) 360 000
c) 373 000 d) 370 500
e) 313 500

30. Al inicio de 1985, una población tiene 10 000 habitantes, el consumo de agua por persona y por hora es de 10 litros.
La población crece a un ritmo de 20% anual.
Determinar el lado de la base cuadrada de un reservorio de 4m de altura capaz de satisfacer la demanda diaria de la población al inicio de 1989.

a) 7 b) 8 c) 25
d) 35 e) 36

31. Un vendedor hace un descuento de 10% a una mercancía sobre el precio de venta al público a un cliente; éste se acerca al gerente y consigue un descuento de 10% sobre lo facturado por el vendedor. Se dirige a la caja y paga 1620 soles.
¿Cuál es el precio de venta al público?

a) 2025 b) 2000 c) 2500
d) 20250 e) 20000

32. El precio de un artículo es de 15 soles en una fábrica. Un comerciante adquiere 5 de tales artículos por los que le hacen el 20% de descuento. Luego los vende obteniendo por ellos 80 soles.
¿Qué porcentaje del precio de venta de cada artículo está ganando?

a) 22% b) 24% c) 20%
d) 33,33% e) 25%

33. Un artículo tiene un precio costo de S/. 3300,00.
¿Cuál será el precio que debe señalar para que al venderlo con un descuento del 20% se obtenga una utilidad del 25% sobre el precio de venta?

a) S/. 5500 b) S/. 5600 c) S/. 6000
d) S/. 5800 e) S/. 7500

34. Charly compró una calculadora y para venderla recargó al precio que le costó en un 30%. Al momento de venderla a su amiga Patty, le hizo una rebaja del 30% resultando perjudicado en S/. 54.
Determinar cuál fue su precio de venta.

a) 540 b) 546 c) 560
d) 564 e) 645

35. Pedro vende un televisor ganando el 20% del precio de venta. De esta ganancia entrega el 20% a Javier por su colaboración en el negocio y de los restantes utilizó el 10% para pagar el transporte del televisor hasta el domicilio de su nuevo dueño, obteniendo como ganancia neta 144 soles.
¿Cuánto le costó a Pedro dicho televisor?

a) 600 b) 700 c) 800
d) 900 e) 1000

36. En una industria de teñido de tela se observa que al teñir una pieza de tela ésta se encoge el 10% de su ancho y el 20% de su largo.
Calcular el costo de una tela que después de teñido tiene $324m^2$. Si el metro cuadrado de tela sin teñir es S/. 12.

a) S/. 4800 b) S/. 5400 c) S/. 5040
d) S/. 6000 e) S/. 6480

37. El precio de un artículo sufre 2 aumentos sucesivos de 20% y luego 30%.
¿Qué porcentaje debe aumentar ahora para que el porcentaje total de aumento sea de 69%?

a) 13% b) 10% c) $8\frac{1}{3}\%$
d) 10,5% e) $9\frac{2}{3}\%$

38. En una tienda, se exhiben videograbadoras. Un comprador obtiene una con un descuento del 20%, luego la vende con una ganancia del 15%. El nuevo comprador la vuelve a vender ganando el 10% del lo que le costó, si finalmente fue vendida con una pérdida de 30% del costo final.
¿En qué tanto por ciento varía el costo inicial?

a) 29,16% b) 29,26% c) 29%
d) 39,1% e) 28,2%

39. Se vende un reloj ganando el 60% del precio de venta. Si lo hubiera vendido ganando el 60% del precio de costo hubiera perdido S/. 113.40.
¿Cuánto le costó el reloj a dicho comerciante?

a) S/. 201.60 b) S/. 154.00
c) S/. 252.00 d) S/. 126.00
e) S/. 315.00

40. Un comerciante invirtió una cierta cantidad en un negocio y ganó el 20%. El total lo invirtió en otro negocio y perdió 10% y por último invirtió lo que le quedaba en otro negocio y ganó el 8%. El resultado de estos negocios ha sido una ganancia de S/. 30784.
¿Cuál fue la cantidad invertida en el primer negocio?

a) S/. 185000 b) S/. 195000
c) S/. 37000 d) S/. 259000
e) S/. 72520

41. Si cada uno de los lados de un cubo se aumenta en 50% el porcentaje de aumento del área del cubo es:

a) 225 b) 100 c) 150
d) 50 e) 125

42. Se tiene un frasco de loción de afeitar que contiene 9 onzas, al 80% de alcohol.
¿Cuántas onzas de agua hay que agregar para obtener una loción al 30% de alcohol?

a) 9 onzas b) 10 onzas
c) 15 onzas d) 16 onzas
e) 17 onzas

43. Un boxeador decide retirarse cuando tengo un 90% de triunfos en su carrera. Si ha boxeado 100 veces, obteniendo 85 triunfos.
¿Cuál es el número mínimo de peleas adicionales necesarias para que el boxeador se pueda retirar?

a) 5 b) 25 c) 50
d) 75 e) 10

44. Una persona pidió al vendedor de una tienda 4 pañuelos de seda y ***n*** pañuelos corrientes. El precio de los pañuelos de seda es el doble de los pañuelos corrientes. El vendedor confundió el pedido y despachó ***n*** pañuelos de seda y 4 pañuelos corrientes. Esta confusión dio lugar a que el valor de la compra aumentara en 50%.
El número de pañuelos corrientes del pedido original fue:

a) 12 b) 14 c) 16
d) 18 e) 15

45. Se mezclan dos clases de café en proporción 1 a 2 y la mezcla se vende con un 5% de beneficio. Después, se mezclan en proporción 2 a 1 y se vende la mezcla con 10% de beneficio. El precio de venta es igual en ambos casos.
Hallar la relación de los precios de las clases de café.

a) 1 a 1 b) 30 a 37 c) 20 a 23
d) 25 a 29 e) 23 a 28

46. Un libro se vende recargándosele el r por 100 del precio de costo; pero un estudiante al al comprarlo le rebajaron el p por 100. Si el vendedor no ganó ni perdió.
¿Cuánto rebajaron al estudiante?

a) $\frac{100r}{(100+r)}$ b) $\frac{r}{(100+r)}$ c) $\frac{(r+100)}{100r}$
d) $\frac{(100+r)}{r}$ e) $1\left(\frac{0,01+1}{r}\right)$

47. Un mayorista vende un producto ganando el 20% del precio de fábrica. Un distribuidor reparte estos productos a las tiendas de comercio ganando una comisión del 15% del precio al por mayor.
La tienda remata el artículo haciendo un descuento del 10% del precio de compra.
¿En qué porcentaje se eleva el precio de fábrica del producto?

a) 20,8 b) 24,2 c) 23,4
d) 25 e) 24,8

48. En una tienda se exhiben los vestidos con el precio "marcado" y un aviso "con la tarjeta más más rebajamos la tercera parte".
El costo de los vestidos es los $\frac{3}{4}$ del precio de venta con tarjeta, entonces la razón entre el precio de costo y el precio "marcado" es :

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{3}{4}$

49. Varios industriales se asocian para la explotación de una patente. El primero, que es el propietario de la patente, cede su explotación con la condición de percibir el 30% del beneficio. El segundo aporta $\frac{5}{24}$ de los fondos necesarios. El tercer pone 4000 unidades monetarias menos; pero realizará funciones de gerente mediante una remuneración suplementaria del 10% de los beneficios. El cuarto ingresa 4000 unidades monetarias menos que el tercero, y así sucesivamente hasta el último.
Si las aportaciones hubieran sido iguales a la más elevada, el total del capital disponible aumentaría $\frac{1}{4}$ de su valor.
¿Cuánto aportó el cuarto socio?

a) 50000 b) 40000 c) 42000
d) 38000 e) 44000

50. Determinar cuántas personas han entrado en un cine, en total, sabiendo que a media función han entrado "n" personas pagando a% menos del precio de la entrada con lo que en la recaudación se ha perdido el b%.

a) $\frac{(a-b)n}{b}$ b) $\frac{an}{b}$ c) $\frac{(a+b)n}{b}$
d) $\frac{an+b}{b}$ e) $\frac{an-b}{b}$

51. Los $\frac{2}{5}$ de una mercadería se vende ganando el 20%; los $\frac{4}{9}$ con una pérdida del 10%. ¿Qué tanto por ciento debe ganarse del resto para que al final haya una ganancia del $5,\widehat{8}\%$ del total?

a) 1% b) 20% c) 15%
d) 18% e) 10%

52. En un ómnibus viajan 70 personas de las cuales sólo el 70% están sentadas; de las mujeres el 80% se encuentran sentadas y únicamente el 10% de los varones.
Hallar la diferencia entre el número de mujeres y varones que viajan en el ómnibus.

a) 25 b) 35 c) 50
d) 60 e) 48

53. El récord de Fernando en los campeonatos de tiro es del 80% sobre sus tiros. Cierta vez en una competencia sobre 80 tiros, él ya ha disparado 60 tiros errando 10. ¿Qué porcentaje de los que faltan tirar, debe acertar como mínimo para superar su récord?

a) 50% b) 75% c) 100%
d) 80% e) 70%

54. En un colegio nacional se matricularon 7500 estudiantes, si el 87% de las mujeres y el 12% de los varones se retiran, el 12% de los que quedan serían mujeres.
¿Cuántos varones se han retirado?

a) 449 b) 457 c) 468
d) 507 e) 512

55. A le encarga a B vender un objeto y B le encarga a su vez a C, quien logra la venta en 20.000 soles. C entrega a B una cantidad, quedándose con un porcentaje (comisión) del valor de la venta. A su vez B retiene un porcentaje (comisión) de lo que le entregó C.
¿Cuánto le correspondió a C y B? éste último le entregó a A S/. 17.100 y el porcentaje de la comisión de C fue el doble que la de B?

a) a C le correspondió S/. 2000 y a B S/. 900.
b) a C le correspondió S/. 1900 y a B S/. 1000.
c) a C le correspondió S/. 2100 y a B S/. 800.
d) a C le correspondió S/. 2200 y a B S/. 700.
e) a C le correspondió S/. 1800 y a B S/. 1100.

56. Un comerciante importaba una cierta cantidad de artículos en U.S.A. Si el precio del artículo en U.S.A. ha aumentado en 25% y el precio de dólar se ha incrementado en 60% , para seguir importando con la misma cantidad de dinero en soles, ¿En qué porcentaje deberá disminuir el número de artículos que deberá importar?

a) 50% b) 25% c) 20%
d) 30% e) 40%

57. Si se quiere que el volumen de un cilindro aumente en un 25%.
¿En qué tanto por ciento deberá aumentar el radio de su base, sabiendo que su altura ha disminuido en un 20%?

a) 20% b) 25% c) 30%
d) 50% e) 18%

58. Albino invierte todo el dinero que tiene en un negocio ganando el 25%. Luego apostó todo en un juego perdiendo el 20% y finalmente con la cantidad que le queda invierte en otro negocio ganando el 40%, obteniendo, al final, S/. 3500. Si compra $\overline{ab}$ artículos iguales con el dinero que ganó y los vendió a S/. 24 cada uno ganando el 20%.
Calcular: $a^2 + b^2$

a) 13 b) 25 c) 20
d) 32 e) 42

59. Se compró un cierto número de objetos a S/. 140 c/u. Al cabo de medio mes, se deterioró el 30% y luego se vendió el 20% de las buenas que quedaron, al fin del mes se deterioran el 10% de las que habían y luego se vendió la mitad de las buenas que quedaron. Si hasta ese momento se ha recuperado la mitad de la inversión inicial.
¿Cuál será el precio de venta de cada objeto bueno sobrante, si se quiere ganar el 0,4% de la inversión inicial?

a) S/. 160 b) S/. 240 c) S/. 280
d) S/. 300 e) S/. 180

60. Un comerciante compra un artículo con un descuento del 20% del precio de lista, se fija el precio para su venta de tal manera que pueda dar 2 descuentos sucesivos del mismo porcentaje que el obtenido en su compra, y aún así obtener una ganancia del 25% del precio de venta.
¿Qué porcentaje del precio fijado es el precio de lista?

a) 55% b) 57% c) 75%
d) 50% e) 60%

Claves

01.	b
02.	a
03.	c
04.	a
05.	d
06.	b
07.	d
08.	d
09.	d
10.	c
11.	c
12.	a
13.	c
14.	c
15.	c
16.	c
17.	c
18.	d
19.	e
20.	b
21.	c
22.	d
23.	b
24.	a
25.	c
26.	c
27.	d
28.	d
29.	d
30.	e

31.	b
32.	e
33.	a
34.	b
35.	c
36.	b
37.	c
38.	a
39.	d
40.	a
41.	e
42.	c
43.	c
44.	c
45.	c
46.	b
47.	b
48.	a
49.	c
50.	b
51.	c
52.	c
53.	b
54.	c
55.	a
56.	a
57.	b
58.	b
59.	c
60.	e

Capítulo

10 REGLA DE INTERÉS

INTRODUCCIÓN

En los bancos, el interés del capital se suma al depósito cada cierto tiempo. Si la adición se hace con más frecuencia, el capital crece más deprisa, por lo que el interés es cada vez mayor. Tomemos un sencillo ejemplo, puramente teórico. Admitamos que se depositan 100 soles en un banco al 100% anual. Si se acumula el interés al depósito, al cabo del año sumarán 200 soles. Veamos ahora qué ocurre si el porcentaje se va sumando al capital inicial cada medio año. Al finalizar el primer semestre llegará a 150% de S/. 100 = S/. 150.

Al finalizar segundo semestre 150% de S/. 150 = S/. 225. Si la adición se realiza cada 3 meses $\left(\frac{1}{4}\text{de año}\right)$, a fin de año se tendrá $(125\%)^4$ de S/. 100 soles que es S/. 224,10 soles aproximadamente. Si se acumula el interés cada $\frac{1}{10}$ de año a fin de año se tendrá $(110\%)^{10}$ de S/. 100 soles que es S/. 259,40 soles aproximadamente. Si hacemos más frecuentes los plazos de acumulación del interés al capital depositado cada $\frac{1}{100}$ de año ; $\frac{1}{1000}$ de año, etc.

¿Crecerá indefinidamente el capital?

CONCEPTOS ELEMENTALES

CAPITAL (C)

Designa un conjunto de bienes o una cantidad de dinero de los que se puede obtener ingresos en el futuro.

INTERÉS (I)

Es la ganancia que produce el capital durante un cierto tiempo con la condición de que cien unidades de dinero produzcan una cierta cantidad anual.

Ejemplo:

* Si se depositan $1000 en un banco y, después de cierto tiempo y se retira en total $1200, significa que se ha ganado un interés de $200.

TASA DE INTERÉS (r%)

Expresa el tanto por ciento del capital que se paga por la utilización de éste durante un tiempo.

Ejemplos:

* Una tasa de 12% mensual significa que se gana el 12% del capital por cada mes.

* Una tasa de 25% bimestral significa que se gana el 25% del capital por cada dos meses.

Observación:

Cuando no se especifique cada cuanto tiempo se aplica la tasa se deberá considerar tasa anual.

TIEMPO (t)

Intervalo durante el cual se presta o utiliza el capital.

* 1 año < > 12 meses.
* 1 mes comercial < > 30 días
* 1 año comercial < > 360 días
* 1 año común < > 365 días
* 1 año bisiesto < > 366 días

MONTO (M)

Es la suma del capital y el interés generado.

Monto = Capital + Interés

Ejemplo:

Si un capital de 3000 soles, genera un interés de 500 soles, el monto es:

3000 soles + 500 soles = 3500 soles

CLASES DE INTERÉS

INTERÉS SIMPLE

En este caso, el capital es constante durante todo el tiempo, el interés es proporcional al tiempo y a la tasa.

Ejemplo:

César prestó 4000 soles a Fiorella durante 5 años con una tasa de 2% anual. Calcule el interés generado.

Resolución:

Como la tasa es 2% anual, por cada año que pasa se gana el 2% de S/. 4000 = S/. 80, entonces en 5 años se gana 5 veces S/. 80 = S/. 400

Observación:

El interés es D.P. al capital, a la tasa y al tiempo

Algunas fórmulas para el cálculo del interés simple:

$$I = C \cdot r\% \cdot t$$

Cuando la tasa y el tiempo están en las mismas unidades de tiempo.

INTERÉS COMPUESTO

En este caso el interés generado pasa a formar parte del capital cada cierto tiempo denominado periodo de capitalización, o sea que el capital aumenta cada cierto tiempo.

Ejemplo:

César prestó 40000 soles a Fiorella durante 4 años con una tasa de 20% anual capitalizable anualmente.
Calcule el interés generado.

Resolución:

Como la tasa es 20% anual, por cada año que pasa se gana el 20% del capital acumulado al comenzar el año. En 4 años se han realizado 4 aumentos sucesivos del 20%.

1er. año : 120% de S/. 40000 = S/. 48000

2do. año : 120% de S/. 48000 = S/. 57600

3er. año : 120% de S/. 57600 = S/. 69120

4to. año : 120% de S/. 69120 = S/. 82944

Al finalizar el 4to. año, el monto es de S/. 82944; que también se puede calcular :

120% 120% 120% 120% S/.40000 = S/.82944

Entonces el interés en los 4 años es :

S/. 82944 – S/. 40000 = S/. 42944

INTERÉS CONTINUO:

El interés continuo se obtiene cuando la capitalización es en cada instante, es decir, fraccionando la tasa y el tiempo en un número de partes infinitamente grande.
El monto que se obtiene con un capital C, durante un tiempo t a una tasa r% (r% y t en las mismas unidades de tiempo, o sea, si r% es anual, t en años, etc.)

$$M = C.e^{r\%t}$$

Donde : e = 2,71828182...

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. ¿Qué interés producirá un capital de S/. 16000 prestado al 32% anual en 3 años y 9 meses?

a) S/. 19200 b) S/. 14099
c) S/. 16418 d) S/. 14928
e) S/. 16028

02. Determinar el interés generado al depositar S/. 3600 al 5% trimestral durante 7 meses.

a) S/. 420 b) S/. 315 c) S/. 650
d) S/. 520 e) S/. 460

03. ¿Qué interés producirá un capital de 5200, prestando al 7% cuatrimestral en 7 años y 5 meses?

a) 6410 b) 8099 c) 6418
d) 8090 e) 8089

04. El interés de un capital impuesto al 2% bimestral es el 72% de dicho capital.
Hallar el tiempo.

a) 2 años b) 3 años c) 4 años
d) 5 años e) 6 años

05. Por un dinero que recibí en préstamo al $\frac{1}{6}\%$ mensual (interés simple) y que devolví a los 100 días tuve que pagar de interés S/. 200.
¿Cuál fue la suma prestada?

a) S/. 30000 b) S/. 35000
c) S/. 36000 d) S/. 37000
e) S/. 38000

06. ¿En cuánto se convierte un capital de 6200 al colocarse en un banco que paga 5% trimestral en un periodo de 2 años y 6 meses?

a) 6300 b) 6000 c) 9300
d) 9000 e) 8400

07. ¿A qué tanto por ciento habrá estado prestado un capital de $ 6000 para haberse convertido en $ 9000 en 30 meses?

a) 10% b) 12% c) 14%
d) 16% e) 20%

08. Un capital estuvo impuesto al 9% de interés anual y después de 4 años se obtuvo un monto de S/. 10200. ¿Cuál es el valor del capital?

a) S/. 6528 b) S/. 12000 c) S/. 13872
d) S/. 9260 e) S/. 7500

09. La tercera parte de un capital se coloca al 9% anual de interés simple. El tanto por ciento al cual debe colocarse el resto para obtener un beneficio total de 11% anual de dicho capital es:

a) 11,8% b) 14% c) 11,5%
d) 12% e) 13%

10. Un capital impuesto durante 15 meses produce un interés igual al 36% del monto.
Calcular el rédito al que ha estado colocado.

a) 45% b) 35% c) 20%
d) 54% e) 55%

11. Si a un capital, se le suma los intereses producidos en 26 meses, se obtiene una cantidad que es al capital prestado como 63 es a 50.
¿A qué tasa fue colocada?

a) 9% b) 10% c) 12%
d) 15% e) 18%

12. ¿A qué porcentaje debe ser colocado un capital para que, en 3 años 4 meses, produzca un interés equivalente a las $\frac{2}{5}$ del monto?

a) 20% b) 10% c) 15%
d) 25% e) 30%

13. Se impone S/. 36000 en 2 bancos, una parte al 8% y la otra al 6% obteniéndose anualmente S/. 2620 de ganancia. Hallar la segunda parte.

a) 13000 b) 15000 c) 18000
d) 16000 e) 20000

14. Dos capitales diferentes se depositan en el banco, el capital mayor al 4% y el otro al 6%; luego de 3 años, los montos son iguales.
Determinan el capital mayor, si excede en S/. 300 al otro capital.

a) S/. 5600 b) S/. 5000
c) S/. 5800 d) S/. 5900
e) S/. 5200

15. El capital de Piero gana 6%, el de Alexis 8% de intereses anuales. La diferencia de capitales es S/. 4000, pero después de un año recibe el mismo interés.
Los capitales suman:

a) S/. 32000 b) S/. 30000
c) S/. 28000 d) S/. 26000
e) S/. 24000

16. Tres amigos invierten en una sociedad $ 2000000; $ 3000000 y $ 5000000 .
Al final del año, obtuvieron una utilidad del 9,6%.
¿Cuál fue la utilidad del socio con menor aporte?

a) $ 384,000 b) $ 220,000
c) $ 192,000 d) $ 240,000
e) $ 480,000

17. Durante cuánto tiempo estuvo depositado un capital al 5% de interés simple anual, si los intereses producido alcanzan al 60% del valor del capital.

a) 10 años b) 12 años
c) 15 años d) 18 años
e) 20 años

18. Un padre deja una herencia a sus dos hijos, el primero recibe el triple del segundo. Ambos imponen sus partes al 4% obteniendo al cabo de determinados tiempos intereses que representan el 2% y 9% de la herencia.
Halle el producto de los tiempos.

a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

19. La diferencia entre los capitales de dos personas es S/. 16000; la primera impone su dinero al 4% y la segunda al 5%; si los intereses producidos por sus capitales son los mismos.
Hallar el capital menor.

a) S/. 80000 b) S/. 64000
c) S/. 32000 d) S/. 48000
e) S/. 24000

20. Cuando un capital se presta durante 4 años el monto que se obtendría sería S/. 12000, pero si se prestara por 5 años sería S/. 13500.
Hallar el valor de la tasa de interés.

a) 10% b) 15% c) 20%
d) 25% e) 30%

21. Un capital colocado al 4% anual durante 5 meses, produce 1100 soles menos que si se colocara al 4% mensual durante el mismo tiempo.
¿Cuál es el valor del capital?

a) S/. 2200 b) S/. 3300 c) S/. 4000
d) S/. 6000 e) S/. 8000

22. Un capital ha sido colocado a interés simple de la siguiente forma : el 25% al 40% anual, el 40% del resto al 30% semestral y el resto al 20% trimestral. Al cabo de qué tiempo el capital se habrá quintuplicado?

a) 7 años 4 meses.
b) 6 años 2 meses 10 días.
c) 7 años 2 meses.
d) 6 años 3 meses.
e) 6 años 8 meses.

23. ¿A qué tasa anual se debe imponer un capital de S/. 1500 para que en un tiempo de 5 años se pueda comprar una refrigeradora de S/. 2500 que sube de precio cada año en su 10% sin acumularse?

a) 20% b) 30% c) 40%
d) 50% e) 60%

24. Tres capitales impuestos separadamente al 12,5% semestral, al 4% bimestral y al 5% trimestral durante un mismo tiempo generan el mismo interés.
Hallar el mayor de los 3 capitales sabiendo que el menor de los montos producidos en un año es S/. 300000

a) S/. 240000 b) S/. 250000
c) S/. 290000 d) S/. 300000
e) S/. 310000

25. Se tienen 2 capitales que suman S/. 33000. Al colocarse el menor al 40% y el mayor al 60% después de 1 año 9 meses el interés mayor es igual al monto producido por el menor.
Determinar la diferencia de capitales.

a) S/. 7500 b) S/. 7800 c) S/. 8000
d) S/. 7200 e) S/. 8100

26. Al imponer un capital durante 5 años se obtuvo un monto superior en S/. 1350 al que se obtuvo en 3 años y medio.
¿A qué tasa anual de interés fue colocado dicho capital, si éste es de S/. 9000?

a) 5% b) 10% c) 12%
d) 15% e) 17,5%

27. Un banco ofrece pagar una tasa r%, un ahorrista deposita C nuevos soles durante t meses y se da cuenta que los intereses ganados representan el n% del monto obtenido.
Determine r.

a) $\frac{1200 \cdot n}{t(100+n)}$ b) $\frac{1200n}{t(1000+n)}$

c) $\frac{600n}{t(100-n)}$ d) $\frac{1200n}{t(100-n)}$

e) $\frac{600n}{t(100+n)}$

28. Dos depositantes ahorraron en el banco iguales cantidades de dinero. El primero retiró su depósito al cabo de 3 meses y recibió S/. 5000; el segundo al retirar su depósito a los 9 meses recibió S/. 7000.
La cantidad que depositaron inicialmente cada uno es:

a) S/. 500 b) S/. 1500 c) S/. 3000
d) S/. 400 e) S/. 4000

29. Ernesto tiene una cantidad de soles invertida al 5% y S/. 4 más que esa cantidad al 7%. Si el interés anual de estas dos inversiones es de S/. 1,12, ¿Cuánto tiene invertido con una tasa de interés a 7%?

a) S/. 20 b) S/. 15
c) S/. 13 d) S/. 11
e) S/. 18

30. Los $\frac{2}{7}$ de un capital se impone al 20% y el resto al 40%. Luego de 9 meses el monto es S/. 7040.
¿Cuál fue el capital?

a) S/. 5500 b) S/. 5600 c) S/. 5700
d) S/. 5800 e) S/. 5400

31. Los $\frac{2}{5}$ de un capital han sido impuestos al 7,5% trimestral, $\frac{1}{3}$ al 35% anual y el resto al $3\frac{1}{3}\%$ mensual. Si el interés obtenido es 8240 soles anuales entonces, el capital en soles es:

a) 12000 b) 18000 c) 24000
d) 36000 e) 48000

32. En un banco que paga 53% anual, un ahorrista deposita S/. 500.00. Al final de cada año, el ahorrista retira S/. 150.00.
Dentro de 2 años después de retirar la suma correspondiente el resto será:

a) S/. 61 b) S/. 790.95
c) S/. 900.65 d) S/. 800
e) S/. 450.15

33. Se impone $ 4800 al 9% durante año y medio.
¿Qué capital sería necesario aumentar para que en un año y 8 meses, al 6% el interés se duplique?

a) $ 7160 b) $ 7150 c) $ 8100
d) $ 8150 e) $ 8160

34. Se invierte un capital de S/. 625000 a cierto interés capitalizable semestralmente durante un año. Si la suma obtenida es de S/. 676000.
¿A qué interés anual se depositó dicho capital?

a) 4% b) 5% c) 6%
d) 7% e) 8%

35. El monto de un capital que está durante cierto tiempo al 15% es de 3850. Si en ese tiempo hubiera estado bajo una tasa del 27% anual, el monto sería de 4130, hallar dicho capital.

a) 3500 b) 3400 c) 3200
d) 3300 e) 3600

36. Un capital de S/. 1000 se deposita al 10% durante 3 años.
¿Cuál es la diferencia de montos al usar interés simple y compuesto con capitalización anual?

a) S/. 28 b) S/. 29 c) S/. 30
d) S/. 31 e) S/. 32

37. Un capital impuesto al 20% bianual capitalizable cada año produce en 3 años un interés de 1655 soles.
Calcule el mencionado capital.

a) S/. 5000 b) S/.5250
c) S/. 5370 d) S/. 5400
e) S/. 5405

38. Calcular el interés obtenido al depositar un capital de S/. 1000, durante un año a una tasa de 20%, si el interés es continuo.

a) S/. 1221,40 b) S/. 1200
c) S/. 200 d) S/. 221,40
e) S/. 250

39. Calcular el valor de una inversión de S/. 1000 compuesta continuamente a una tasa de interés del 8% anual, después de 10 años.

a) S/. 2225,54 b) S/. 2235,64
c) S/. 2215,44 d) S/. 2230
e) S/. 2220

40. Hallar el monto que se obtiene al colocar un capital de 4000 al 2% trimestral durante 4 años, si se aplica capitalización continua.

a) $4000e^{\frac{2}{100}}$ b) $4000e^{\frac{8}{100}}$
c) $4000e^{\frac{8}{25}}$ d) $4000e^{\frac{1}{20}}$
e) $4000e^{4}$

41. Los capitales de tres personas suman S/. 101000 impuestos respectivamente a 4%, 3% y 5% de interés anual.
El primero cobró un interés anual de S/. 94 más que el segundo y el tercero cobró un interés anual de S/. 120 más que el primero.
El valor aproximado del capital de la primera persona en soles es :

a) 42400 b) 32468 c) 31560
d) 29785 e) 28010

42. El monto producido por el m% de un capital durante 5 meses y al 4% bimestral, resulta ser igual al interés producido por el $27,\widehat{27}\%$ del resto del capital, impuesto durante 15 meses al 22% semestral.
Hallar "m"

a) 18 b) 20 c) 10
d) 25 e) 12

43. José vende su auto y el dinero lo presta por 1 año 9 meses al 5%, los intereses producidos lo reparte entre sus 3 hijas a una de ellas le dio los $\frac{3}{7}$, a la otra los $\frac{4}{11}$ y a la restante S/. 64.
¿En cuánto vendió el auto?

a) S/. 4520 b) S/. 7840 c) S/. 5430
d) S/. 3720 e) S/. 3520

44. Tengo S/. x, lo impongo al 8%. Durante 8 meses, retiro dicho monto y vuelvo a imponer por 4 meses a una tasa n% más que la anterior obteniendo un interés que representa $\frac{3}{4}$ de los intereses de la primera imposición.
Hallar : n

a) 42,4 b) 45,2 c) 43,1
d) 40,8 e) 51,3

45. "A" le presta a "B", "B" le presta a "C", "C" le presta a "A", capitales que son proporcionales a los números 5; 4 y 3 respectivamente. "A" prestó a una tasa del 10% anual y "B" prestó al 15%.
¿A qué tasa prestó "C" a "A", si después de un cierto tiempo la deuda de cada uno desapareció?

a) 17,60% b) 19,13% c) 20,32%
d) 23,33% e) 24,32%

46. Una señora solicita un préstamo de S/. 2000 a una institución financiera. Cada mes debe amortizar S/. 100 del capital prestado, pagando un interés al inicio de cada mes del 1% sobre el capital amortizado.
Determine el interés total.

a) S/. 210 b) S/. 220 c) S/. 225
d) S/. 230 e) S/. 235

47. Un padre deja una herencia a sus dos hijos; el primero recibe $\overline{(3a)(3b)(3c)00}$ y el segundo $\overline{abc00}$ soles respectivamente; ambos imponen sus partes al 4% obteniendo, al cabo de un tiempo, el primero un interés que representa el 2% de la herencia, posteriormente el segundo obtiene un interés que representa el 9% de la herencia.
Hallar el producto de los dos tiempos de imposición.

a) 4 b) 5 c) $\frac{11}{2}$
d) 6 e) 8

48. Calcular la tasa anual de interés compuesto equivalente al interés producido por un capital prestado al 24% anual durante 2 años con capitalización continua.

a) 25,625 b) 26,65% c) 27,12%
d) 28,1% e) 29%

49. Un capital se ha dividido en tres partes A, B y C directamente proporcional a los números 9, 10 y 11 respectivamente. ¿En qué relación tendrían que estar las tasas de estos tres capitales, para que en un año el interés de B sea el doble del de A y el interés de A el triple del de C?.

a) 9 ; 11 ; 10 b) 18 ; 10 ; 11
c) 33 ; 15 ; 17 d) 55 ; 99 ; 15
e) 66 ; 75 ; 30

50. Un capital de S/. 70000 estuvo impuesto durante un cierto número de años, meses y días; por los años se pagó el 32%, por lo meses 30% y por los días el 24%. Calcular el interés producido por dicho capital, sabiendo que si se hubiera tenido impuesto todo el tiempo al 8% habría producido S/. 4725 más que si se hubiera tenido impuesto todo el tiempo al 6%.

a) S/. 69400 b) S/. 74900
c) S/. 78560 d) S/. 74540
e) S/. 71280

51. "XAV" impone su capital al 80% anual capitalizable trimestralmente. Se observa que el interés en los 2 últimos periodos es S/. 223280.
Calcule el mínimo capital (si es par) y el tiempo que impuso su capital.

a) S/. 156250 y 1 año 9 meses.
b) S/. 390625 y 2 años.
c) S/. 468750 y 1 año 9 meses.
d) S/. 781250 y 2 años.
e) S/. 562500 y 1 año 6 meses.

52. Una persona se presta cierto capital a una tasa del 10% cuatrimestral (sobre el saldo deudor de cada cuatrimestre). Si al cabo del 1er. cuatrimestre, amortizó los $\frac{5}{11}$ de su deuda y 8 meses después pagó S/. 1452 liberándose así de su deuda.
¿Cuánto era el capital prestado?

a) 2040 b) 2100 c) 2000
d) 2300 e) 2500

53. "YILDIRAY" divide su capital en partes proporcionales a 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; ..... imponiéndolos por separado durante 1; 3; 9 ; 27 ..... meses, todos ellos al 12% cuatrimestral, obteniéndose una renta total de S/. 413352.
Calcule el capital de "YILDIRAY"

a) 24200 b) 43200 c) 57600
d) 19200 e) 86400

54. ¿Cuánto dejo de ganar si coloco un capital de S/. 20000 al 3% mensual durante 1 año 3 meses, en vez de colocarlo al 3% mensual durante el mismo tiempo; pero capitalizable en forma continua?

(Considere $e^{\frac{9}{20}} = 1{,}5683$)

a) S/. 1200 b) S/. 2400
c) S/. 1300 d) S/. 2000
e) S/. 2366

55. Un grupo de amigos colocan sus capitales en el banco "XAV" que son 1 ; 4 ; 18 ; 96 ; 600 ; .... soles y cuyos tiempos de permanencia son 3 ; 8 ; 30 ; 144 ; 840 ; .... quincenas respectivamente; si la tasa es de 48% semestral. Al final el monto fue de S/. 1021102.96, calcular la suma de cifras del interés que genera el capital que estuvo impuesto mayor tiempo.

a) 27 b) 36 c) 15
d) 12 e) 21

56. "XAV" divide su capital en varias partes que son 1 ; 9 ; 25 ; 49 ; 81 ; ..... soles y cuyos tiempos de permanencia en cierta entidad financiera es de 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; ..... meses respectivamente. Si al sumar los intereses obtenidos resulta S/. 5198.94.
Calcular la diferencia entre la mayor y menor cifra de la cantidad en que "XAV" divide su capital. (La tasa de interés fue de 3% quincenal)

a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

57. "XAV" deposita durante un año cierta cantidad de dinero en un banco que paga 8% anual capitalizable semestralmente, el monto obtenido se deposita otro año más pero en otro banco que paga 10% anual capitalizable semestralmente. Si al final del segundo año, el monto recibido fue de S/. 298116.
Hallar la suma de cifras del capital inicial.

a) 27 b) 17 c) 12
d) 7 e) 5

58. Una inmobiliaria con una inversión de S/. 28000 compró 21 lotes de terreno de $200m^2$ cada uno, divide el terreno comprado en lotes de $120m^2$ cada uno, vende 7 de ellos con una ganancia del 25% y lo que recibe lo coloca en un banco que le paga un interés del r% anual.
Hallar r%, si al cabo de un año recibió un monto igual al 32,5% de su inversión inicial.

a) 20% b) 25% c) 30%
d) 28% e) 24%

59. Javier Carranza pide prestado a César Lau cierta suma y éste accede; pero con el fin de ganar el 20% de su capital le dice : "Me pagarás 2400 soles al final del primer año, y a partir del siguiente año me pagarás 10% más que el año anterior, quedando saldada tu cuenta al cabo de 5 años"
Javier acepta y deposita una parte del dinero en un banco al 30% de interés simple y luego de 3 años ganaría un interés igual a la cantidad que desea ganar César.
¿Cuál es esa parte?

a) S/. 1987,16 b) S/. 2712
c) S/. 2713,3 d) S/. 2468
e) S/. 3548,5

60. Un comerciante se prestó S/. 490, al 4% quincenal durante dos meses, con lo cual compró dos tipos de café de S/. 4 y S/. 9 en cantidades proporcionales a 2 y 3.
¿A cómo se vendió 1 kg de mezcla de dichos cafés, si la venta originó gastos por S/. 30 y el comerciante obtuvo al cabo de los dos meses una ganancia neta de S/. 68 después de cancelar su deuda?.

a) S/. 9,52 b) S/. 9,48 c) S/. 10,02
d) S/. 10 e) S/. 12

Claves

01.	a
02.	a
03.	b
04.	e
05.	c
06.	c
07.	e
08.	e
09.	d
10.	a
11.	c
12.	a
13.	a
14.	d
15.	c
16.	c
17.	b
18.	e
19.	b
20.	d
21.	d
22.	d
23.	b
24.	d
25.	b
26.	b
27.	d
28.	e
29.	d
30.	b

31.	c
32.	b
33.	e
34.	e
35.	b
36.	d
37.	a
38.	d
39.	e
40.	c
41.	b
42.	e
43.	e
44.	a
45.	d
46.	a
47.	d
48.	b
49.	d
50.	b
51.	c
52.	c
53.	d
54.	e
55.	b
56.	e
57.	d
58.	c
59.	c
60.	a

Capítulo

11 ESTADÍSTICA

Nilómetro

Los antecedentes de la Estadística son tan remotos como la propia sociedad humana. La Estadística Descriptiva tiene su origen mil o dos miles años antes de Cristo, remontándose a las primeras civilizaciones en Egipto, China y Mesopotamia, donde se hacían censos para la administración de los imperios. Al parecer, los datos más antiguos corresponden a los censos chinos ordenados por el emperador Yao (hacia el año 2238 a.c.), así como otros censos de población y riqueza encontrados en Egipto y relacionados con la construcción de las pirámides. También en Egipto, Ramsés II elaboró un censo de tierras para establecer una nueva política de reparto de las mismas. Los egipcios tuvieron el barómetro económico más antiguo: un instrumento llamado «Nilometro», que medía el caudal del Nilo y servia a definir un índice de fertilidad, a partir del cual se fijaba el monto de los impuestos. Posteriormente, hacia el año 555 a.c., podemos citar los censos del Imperio Romano, destinados a la organización política y guerrera.

En la Edad Media, se produce un considerable estancamiento de la Estadística y hay que esperar al nacimiento de las escuelas mercantilistas de los siglos XVI, XVII y XVIII. En 1660, apareció la llamada "Aritmética Política", destinada a la descripción de sucesos propiamente políticos. Esta ciencia, que nació en la universidad alemana de Haltustadt y pronto se extendió por distintas universidades alemanas y suizas, fue ya denominada Estadística por el alemán Schmeitzel. En principio, esta ciencia tenía por objeto la mera descripción numérica de las cuestiones políticas del Estado, faltándole aún la búsqueda de leyes generales. La gran transformación de la Estadística surge de su vinculación al Análisis Matemático a través del Cálculo de Probabilidades, cuyos orígenes se sitúan hacia mediados del siglo XVII y cuyos principales impulsores fueron los matemáticos franceses Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1665), junto con el holandés Christian Huygens (1629-1695). Es entonces cuando aparecen las primeras aportaciones significativas al Cálculo de Probabilidades como disciplina puramente matemática.

A partir de esta fecha, esta ciencia fue constituyéndose como tal y vinculándose fuertemente a la teoría de funciones durante los siglos XVIII, XIX y principios del XX, gracias a los logros de figuras notables entre las que cabe destacar a Bernoulli, Leibnitz, Bayes, Laplace, Chebychev, Kolmogorov o Markov.

INTRODUCCIÓN

El estudio de la Estadística es de carácter indispensable para cualquier profesional debido a que es una herramienta que le será de gran utilidad para la toma de decisiones sobre asuntos diversos, tiene aplicación en todos los campos del saber y profesiones.

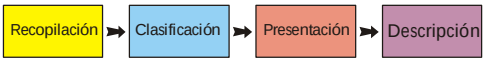
Es muy difícil establecer una cronología exacta de los orígenes de la estadística. Parece ser que los datos más antiguos que se conocen son los censos chinos ordenados por el emperador Tao antes del año 2200 a.C.

A lo largo de la Edad Media y hasta principios del siglo XVII, la Estadística era puramente descriptiva, Bernouilli (1654 - 1705) y sobre todo Laplace (1749 - 1827) desarrollaron conceptos matemá-ticos fundamentales para la teoría estadística. El primero formuló la famosa ley de los grandes números y el segundo puso en evidencia las ventajas que podría aportar el cálculo de probabilidades en el estudio de los fenómenos naturales de causas complejas.

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

Es una rama de la Matemática aplicada que nos proporciona los métodos para realizar un estudio de un grupo de datos en cuanto a su recopilación, clasificación, presentación y descripción para poder tomar decisiones o hacer conclusiones.

ETAPAS :



CONCEPTOS PREVIOS :

Población : Es el conjunto universal o referencial para realizar el estudio estadístico, cuyos elementos poseen la característica que se va a estudiar.

Muestra : Es un subconjunto de la población, los muestreos se realizan cuando es difícil o complicado estudiar toda la población, también se realiza con la finalidad de obtener resultados en menor tiempo y a menor costo, para ello es indispensable elegir una muestra adecuada, que represente a la población, de acuerdo a la característica que se estudia.

Ejemplo :

Conjunto de alumnos del colegio TRILCE $\rightarrow$ Población
Conjunto de alumnos de 5to de secundaria $\rightarrow$ Muestra

Ejercicio :
Cite algunos ejemplos en los cuales sea conveniente tomar una muestra en vez de toda población debido a la dificultad que presenta su estudio.

POBLACIÓN

TIPOS DE VARIABLES

Variable Cualitativa : Son aquellas que indican una cualidad :

Ejemplos :
La variable cualitativa ***sexo*** puede ser solamente ***masculino*** o ***femenino***.
La variable cualitativa ***turno*** puede ser ***mañana***, ***tarde*** o ***noche***.
Son también variables cualitativas : la profesión de tus padres, el color de tus ojos, la universidad en la que piensas estudiar, etc.

Observación : A este tipo de variables, se les puede asignar valores numéricos de acuerdo a la manera de utilizar los datos.
Por ejemplo, si estamos evaluando personal para trabajar en una mina a la variable sexo se le puede asignar 0 si es femenino y 1 si es masculino, indicando que se prefiere personal masculino para dicho trabajo.

Variable Cuantitativa : Son aquellas que pueden tomar valores numéricos :
Por ejemplo :
Edad, número de hijos, tiempo de servicio, el coeficiente intelectual, notas, vida media, carga electrónica, hematocrito, etc.

* *Variable Cuantitativa Discreta :* Toma valores que están en correspondencia biunívoca con los números naturales.

  Ejemplo :
  La cantidad de hijos, cantidad de ingresantes a la UNI, el número de empleados de una fábrica, la cantidad de glóbulos rojos en una gota de sangre, etc.

* *Variable Cuantitativa Continua :* Toma todos los valores en algún intervalo.

  Ejemplo :
  Temperatura de un gas, longitud de una pared, estatura de un estudiante, etc.

ETAPAS DEL ESTUDIO ESTADÍSTICO :

I. RECOPILACIÓN : Esto se realiza mediante encuestas y cuestionarios. Cuando se estudia toda la población, se denomina censo y cuando se realiza sobre un subconjunto de la misma, se denomina muestreo.

II. CLASIFICACIÓN : Cuando la cantidad de datos es grande, conviene clasificarlos y para simplificar su estudio. Esta clasificación debe realizarse teniendo en cuenta la finalidad del estudio y en muchos casos dependerá del criterio del profesional que hace dicho análisis.

A continuación, se presentan las edades de un grupo de 20 personas.
2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 12 ; 14 ; 16 ; 16 ; 16 ; 18; 21 ; 22 ; 23 ; 24 ; 25 ; 27 ; 29 ; 32

Tamaño de la muestra (n) : Es la cantidad total de datos.

$$n = 20$$

Alcance (A) : Intervalo cerrado cuyos límites son el menor y mayor de los datos.

$$A = [2 ; 32]$$

Rango o recorrido (R) : Es la longitud del alcance, se calcula restando el menor dato del mayor dato.

$$R = 32 - 2 = 30$$

Intervalo de clase (I_i) : Es un intervalo que se obtiene al dividir el alcance, para formar grupos de menor tamaño. Por ejemplo, dividamos el alcance en *6 intervalos de clase* del mismo tamaño.

$$[2;7\rangle\ [7;12\rangle\ [12;17\rangle\ [17;22\rangle\ [22;27\rangle\ [27;32]$$

2 — 32

Número de intervalos de clase (K): Es la cantidad de intervalos de clase en que se divide el alcance, esto depende de la aplicación que tiene el estudio de los datos.
Por ejemplo, si se desea conocer la cantidad de alumnos aprobados y desaprobados en el colegio TRILCE bastará formar dos intervalos de clase.

Observación : Existen algunas reglas que se pueden tomar como referencia para determinar el número de intervalos de clase.

Regla de Sturges : $K = 1 + 3{,}3\ \text{Log}(n)$

Regla de Joule : $K = \sqrt{n}$

Ejemplo : Para n = 30
Apliquemos la regla de Sturges :

$$K = 1 + 3{,}3\ \text{Log}(30) = 5{,}87$$

Que se puede aproximar : $K \cong 6$

EJERCICIO : Discuta en clase las ventajas y desventajas de agrupar los datos en intervalos de clase.

Ancho de clase (w_i) : Es la longitud del intervalo de clase. Si todos los anchos de clase son iguales, se dice que el ancho de clase es constante y se puede calcular de la siguiente manera :

$$w = \frac{R}{K}$$

Tabla de distribución de frecuencias

I_i	f_i
$[2 - 7\rangle$	4
$[7 - 12\rangle$	1
$[12 - 17\rangle$	6
$[17 - 22\rangle$	2
$[22 - 27\rangle$	4
$[27 - 32\rangle$	3

III. PRESENTACIÓN : Se pueden presentar los datos en tablas de frecuencias o en gráficos.

Presentación Tabular :

Marca de clase (x_i) : Es un valor que representa a los datos del intervalo de clase, se calcula como la semisuma de los límites inferior y superior del intervalo de clase y está ubicado en el punto medio del mismo.

$$x_i = \frac{L_{inf} + L_{sup}}{2}$$

Frecuencia absoluta simple (f_i) : Es la cantidad de datos u observaciones en el i - ésimo intervalo de clase.
Se cumple que :

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = n$$

Frecuencia absoluta acumulada (F_i) : Es la suma de todas las frecuencias absolutas simples desde el primer intervalo hasta el i - ésimo intervalo.
Se cumple :

$$F_k = n \qquad F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$$

Frecuencia relativa simple (h_i): Indica qué parte del total de datos se encuentran en el i - ésimo intervalo. Se calcula como el cociente de la frecuencia absoluta y el total de datos. Para obtener el tanto por ciento basta multiplicar esta valor por 100.

Se cumple que :

$$h_i = \frac{f_i}{n} \qquad \sum_{i=1}^{k} h_i = 1$$

Frecuencia relativa acumulada (H_i) : Indica qué parte del total de datos se encuentran desde el primer intervalo de clase hasta el i - ésimo intervalo. Se calcula como el cociente de la frecuencia absoluta acumulada y el número total de datos. Para obtener el tanto por ciento basta multiplicar esta valor por 100.
Se cumple que :

$$H_i = \frac{F_i}{n} \qquad H_i = \sum_{j=1}^{i} h_j \qquad H_k = 1$$

Ejemplo : La tabla con los datos del ejemplo anterior, es :

Intervalo	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[2 ; 7 ⟩	4,5	4	4	0,20	0,20
[7 ; 12⟩	9,5	1	5	0,05	0,25
[12 ; 17⟩	14,5	6	11	0,30	0,55
[17 ; 22⟩	19,5	2	13	0,10	0,65
[22 ; 27⟩	24,5	4	17	0,20	0,85
[27 ; 32⟩	9,5	3	20	0,15	1,00

Presentación Gráfica

Los gráficos son muy utilizados por los periodistas para presentar datos en la televisión y periódicos, son de utilidad para los médicos, ingenieros, administradores, economistas, psicólogos, profesores, etc. ya que permite observar el comportamiento de una muestra con respecto a alguna característica, de un solo vistazo.
Algunos de los gráficos más usados son : Diagrama de barras, histogramas, pirámides de población, polígonos de frecuencias, diagrama de sectores, pictogramas.

Diagrama de barras

En este tipo de gráfica, sobre los valores de las variables se levantan barras estrechas de longitudes proporcionales a las frecuencias correspondientes. Se utilizan para representar variables cuantitativas discretas.

Por ejemplo : El siguiente diagrama de barras gráfica la cantidad de problemas propuestos para este capítulo por los profesores de Aritmética.

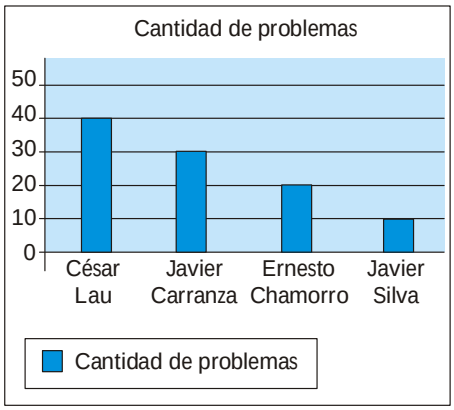
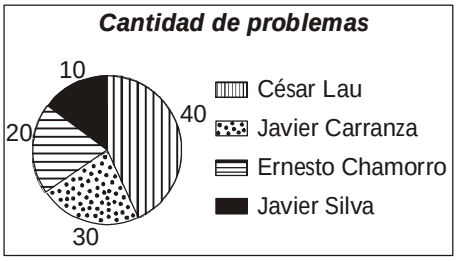
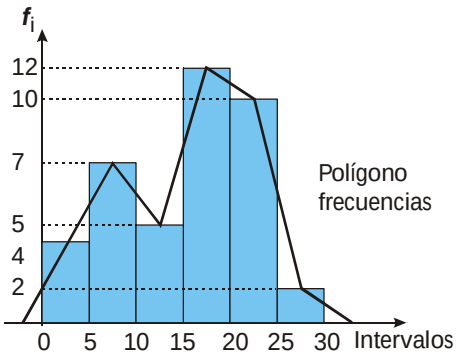


Diagrama de sectores : En un diagrama de este tipo, los 360º de un círculo se reparten proporcionalmente a las frecuencias de los distintos valores de la variable. Resultan muy adecuados cuando hay pocos valores, o bien cuando el carácter que se estudia es cualitativo.



Histogramas : Los histogramas se utilizan para representar tablas de frecuencias con datos agrupados en intervalos. Si los interva-los son todos iguales, cada uno de ellos es la base de un rectángulo cuya altura es propor-cional a la frecuencia correspondiente.

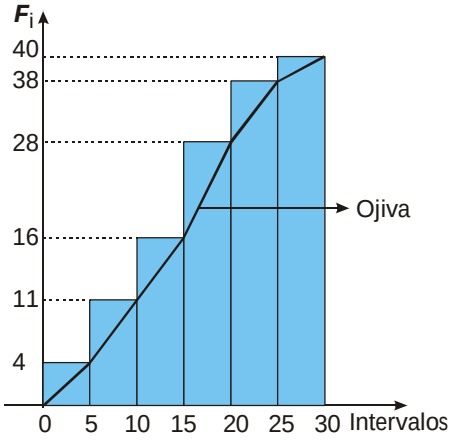
Polígono de frecuencias : Si se unen los puntos medios de la base superior de los rectángulos, se obtiene el polígono de frecuencias.



Observación : El área de la superficie limitada por el polígono de frecuencias y el eje horizontal es igual a la suma de las áreas de los rectángulos que forman el histograma.

Diagrama Escalonado : (Histograma de frecuencias acumuladas) Si se representan las frecuencias acumuladas de una tabla de datos agrupados, se obtiene el histograma de frecuencias acumuladas.

Ojiva : Se obtiene al unir los extremos superiores de las barras de un histograma de frecuencias absolutas acumuladas.



IV. DESCRIPCIÓN : La descripción de los datos se realizará mediante las medidas de tendencia central.

Media :

Para datos no agrupados : Es la media aritmética de los datos.

Para datos agrupados :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{n} \qquad \bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i h_i$$

Mediana :

Para datos no agrupados : La mediana es aquél dato que ocupa la posición central, cuando los datos están ordenados y si la cantidad de datos es par la mediana es el promedio de los dos datos centrales.

Ejemplos :

La mediana de los datos : 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 5 ; 6 ; 8 , 9 ; 20 ; 24; 25 es 6

La mediana para los datos : 4 ; 5 ; 12 ; 20 ; 100 ; 132 es la media aritmética de 12 y 20 que son los dos términos centrales, es decir la mediana es 16.

Para datos agrupados :

$$Me = L_{inf} + w\left(\frac{\frac{n}{2} - F_{me-1}}{f_{me}}\right)$$

$$Me = L_{inf} + w\left(\frac{\frac{1}{2} - H_{me-1}}{h_{me}}\right)$$

Donde :

L_{inf} : Límite inferior de la clase mediana.

w : Ancho de clase

F_{me-1} : Frecuencia absoluta acumulada de la clase anterior a la clase mediana.

f_{me} : Frecuencia absoluta simple de la clase mediana.

Moda :

Para datos no agrupados : Es el valor que aparece con más frecuencia. Si son dos los números que se repiten con la misma frecuencia, el conjunto tiene dos modas y se denomina bimodal. Otros conjuntos no tienen moda.

Ejemplo :

La moda para los datos :

3 ; 4 ; 6 ; 6 ; 6 ; 7 ; 10 ; 21 es 6

Para datos agrupados :

$$Mo = L_{inf} + w\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right)$$

Donde :

L_{inf} : Límite inferior de la clase modal.

w : Ancho de clase

$\Delta_1 = f_{mo} - f_{mo-1}$

$\Delta_2 = f_{mo} - f_{mo+1}$

f_{mo} : frecuencia absoluta simple de la clase modal.

f_{mo+1} : frecuencia absoluta simple de la clase posterior a la clase modal.

f_{mo-1} : frecuencia absoluta simple de la clase anterior a la clase modal.

EJERCICIOS PROPUESTOS

ENUNCIADO :

Se analizan las notas de 20 alumnos en el curso de Aritmética recogiéndose los siguientes datos :

3 , 4 , 8 , 2 , 11 , 7 , 10 , 12 , 16 , 15
7 , 11 , 10 , 6 , 9 , 9 , 10 , 13 , 13 , 14

01. ¿Cuántos estudiantes aprobaron el curso según los datos originales?

a) 4 b) 6 c) 8
d) 0 e) 12

02.Calcular la moda para los datos sin agrupar:

a) 1 b) 10 c) 12
d) 16 e) 13

03. Calcular la media para datos sin agrupar :

a) 10,5 b) 10,2 c) 9,5
d) 19,8 e) 12,7

04. Calcular la mediana para los datos sin agrupar :

a) 9,5 b) 9,8 c) 9
d) 10 e) 10,5

05. De la siguiente tabla de distribución de frecuencias, calcular : $f_2 - f_1 + n$

Clases	f_i	h_i	F_i	H_i
[10 , 20>		0,1		
[20 , 30>				
[30 , 40>		0,3		
[40 , 50>	25			0,8
[50 , 60>	20			

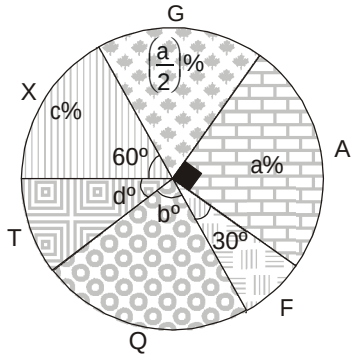
a) 102 b) 103 c) 104
d) 105 e) 106

06. Dada la siguiente distribución de frecuencia.
Hallar : $f_1 + f_3 + F_4$

l_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[10 , 20>			0,1	
[20 , 30>				
[30 , 40>	24		0,3	
[40 , 50>	30			0,85
[50 , 60>				

a) 95 b) 97 c) 98
d) 100 e) 120

07. El siguiente pictograma muestra las preferencias de 880 estudiantes sobre los cursos de Matemática (A , X , G , T) y ciencias (F y Q).
Calcule : (a+ b – 3c + d)



a) 140 b) 116 c) 104
d) 110 e) 98

08. Si se tiene la siguiente distribución de frecuencias sobre las estaturas (en metros) de un grupo de 50 jóvenes.

Intervalo de Clase	f_i	H_i
[1,55 ; 1,60>		
[1,60 ; 1,65>		
[1,65 ; 1,70>		
[1,70 ; 1,75>	5	0,96
[1,75 ; 1,80>		

Determinar qué porcentaje de jóvenes poseen una estatura no menor de 1,70m.
Si se sabe que :

$$h_1 = h_5 \quad y \quad h_2 = h_4$$

a) 12% b) 14% c) 18%
d) 20% e) 24%

09. El profesor Lau tiene 6 hijos, de los cuales 3 son trillizos y 2 mellizos. Si al calcular la media, mediana y moda de estas edades resultaron 10 ; 11 y 12 respectivamente.
Halle la diferencia entre la máxima y mínima edad.

a) 10 b) 6 c) 8
d) 7 e) 9

10. De la siguiente distribución de frecuencias de las notas de 25 alumnos se pide completar el tablero con un ancho de clase constante igual a 2 y $f_4 = f_5$

.

I_i	f_i	F_i	$x_i f_i$
			15
[, 6>			20
			14
		25	

Si la mínima nota aprobatoria es 10.
¿Qué tanto por ciento de los alumnos desaprobaron?

a) 72% b) 75% c) 76%
d) 78% e) 80%

11. Completar la siguiente tabla de distribución de frecuencias sobre la cantidad de personas atendidas por los empleados de un banco durante 1 día e indicar qué tanto por ciento del total de empleados atienden de 20 a 33 personas.

Cantidad de personas atendidas	f_i	h_i	H_i
[12 , 18>			0,10
[, 24>		0,30	
[, 30>	42		
[, 36>	18		

a) 70% b) 72% c) 73%
d) 74% e) 75%

12. La siguiente tabla nos muestra los intervalos de clase y la frecuencia relativa de una tabla de distribución de frecuencias del número de pantalones que producen los empleados en una fábrica.
Calcular que tanto por ciento de personas producen de 5 a 8 pantalones.

I_i	[5 , 7>	[7 , 9>	[9 , 12>	[12 , 15>
h_i	2k	k+0,02	0,08	$\frac{3}{2}$k

a) 69 b) 71 c) 73
d) 75 e) 51

ENUNCIADO

(Para ejercicios del 613 al 616)
Se clasificó la inversión de un grupo de compañías mineras en una tabla de frecuencias. Se sabe que la máxima inversión es de 56 millones de soles, que la amplitud de los intervalos es de 8 millones de soles, que las frecuencias absolutas correspondientes a los intervalos son :

1 ; 16 ; 21 ; 9 ; 8 ; 3 ; 2

13. ¿Qué porcentaje de compañías invierten 24 millones como mínimo?

a) $38\frac{2}{3}\%$ b) $78\frac{2}{3}\%$
c) $38\frac{1}{3}\%$ d) $36\frac{2}{3}\%$
e) $32\frac{6}{3}\%$

14. Hallar la inversión más frecuente.

a) 18,35 b) 20 c) 18,5
d) 20,5 e) 18

15. Hallar la inversión promedio en soles :

a) 20,4 b) 23,53 c) 24,5
d) 20,5 e) 23,2

16. Hallar la mediana de los datos clasificados (en millones) de las compañías.

a) 20,5 b) 20,95 c) 23,53
d) 18,35 e) 22,35

17. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones :
I. La moda sólo se calcula para datos discretos.
II. El área del histograma es igual al área del polígono de frecuencias.
III. La ojiva es una curva trazada a partir del histograma de frecuencia absoluta.

a) FVF b) FFF c) FFV
d) VFF e) VVF

18. Se tiene la siguiente tabla de frecuencias incompleta :

Notas	h_i	H_i
	0,18	
[4 , 8 >		0,44
[8 , 12>		
[12 , 16>	0,12	0,91
[16 , 20>		

Halle la nota promedio.

a) Mayor que 10 b) 9,8
c) Menor que 7 d) 8,72
e) 7,8

19. En la siguiente tabla, se muestra la cantidad de dinero que gastan semanalmente los alumnos del colegio TRILCE.
Halle la mediana.

Nº de soles	Nº de alumnos
[0 , 20>	400
[20 , 40>	300
[40 , 60>	250
[60 , 80>	150
[80 , 100>	50

a) $31,\widehat{6}$ b) 32,3 c) 33,3
d) 40,3 e) 38,6

20. De la siguiente tabla de frecuencias, calcule qué porcentaje de personas tiene por lo menos 20 años, sabiendo que hay tantas personas de por lo menos 25 años y menos de 30 años como personas de por lo menos 30 años, pero menos de 40 años.

I_i	x_i	f_i	F_i	H_i
[5 ,15>		3K		
[15 ,20>			5K	
[20 ,25>		5K		
[25 ,30>				
[30 ,40>			14K	
[40 ,45>		K		

a) 55,5% b) 66,6% c) 77,7%
d) 88,8% e) 44,4%

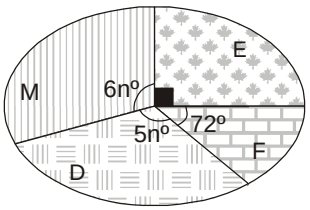
21. "Se tiene una distribución de frecuencias con cinco intervalos de clase cuyas frecuencias relativas son :

$$\frac{2-k}{5} \; ; \; \frac{2k}{5} \; ; \; \frac{k}{5} \; ; \; \frac{2-3k}{5} \; ; \; \frac{k+1}{5}$$

respectivamente".
Determinar los valores de k que hagan cierto el enunciado anterior.

a) $k \in R^+$
b) $k \in R$
c) $k \in R - \left\{ x / x \in \left\langle 0 \; ; \; \frac{2}{3} \right\rangle \right\}$
d) $k \in R - \left\{ x / x \in \left\langle -\frac{1}{2} \; ; \; 3 \right\rangle \right\}$
e) $k \in R - \left\{ x / x \in \langle -\infty \; ; \; 0] \cup \left[\frac{2}{3} \; ; \infty \right\rangle \right\}$

22. El siguiente gráfico muestra las preferencias de un grupo de N alumnos sobre los cursos: Matemática (M); Estadística (E), Física (F) y Dibujo (D).
Determinar cuántos prefieren Matemática si los que prefieren Estadística son 100 personas.



a) 140 b) 120 c) 180
d) 150 e) 130

23. De la siguiente distribución de frecuencias:

Notas	f_i
[200 ; 280>	4
[280 ; 320>	16
[320 ; 380>	36
[380 ; 540>	88
[540 ; 600>	40
[600 ;1000>	16

Determinar la diferencia entre la media y la mediana muestral.

a) 12,2 b) 15,2 c) 12
d) 18,2 e) 20,2

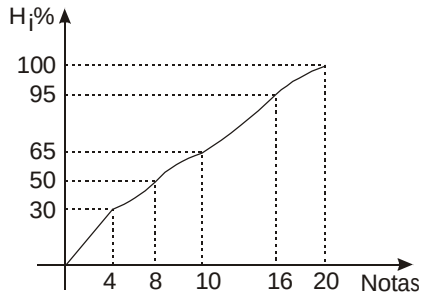
24. Si el siguiente cuadro de distribución es simétrica y tiene un ancho de clase común.

I_i	f_i	F_i	h_i
[20, >	12		
[,36>			0,15
[, >			
[, >			
[,]		60	

Calcule la moda.

a) 40 b) 45 c) 46
d) 49 e) 50

25. El siguiente cuadro muestra la ojiva de las frecuencias relativas acumuladas de las notas de un examen de ingreso a la U.N.M.S.M.
Determinar qué tanto por ciento de alumnos tuvieron una nota entre 9 y 15.



a) 32,25% b) 33,25% c) 32,50%
d) 33,75% e) 32,75%

26. Complete el siguiente cuadro de distribución de frecuencias, si tiene ancho de clase común.

l_i	X_i	f_i	h_i	H_i
[30 ; 50⟩		a	0,20	
[; ⟩	b	20		
[c ; ⟩				0,90
[;]			d	
Total		50		

Calcule el valor de la Mediana más la suma de (a + b + c + d)

a) 201,50 b) 202,20 c) 203,60
d) 205,10 e) 206,50

27. En una prueba de Aptitud Académica se evaluó a ***n*** estudiantes y las notas obtenidas se clasificaron en una tabla de distribución de frecuencias como se muestra a continuación :

Marca de clase	45	55	65	75	85
Frecuencia relativa	$\frac{K}{50}$	$\frac{3K}{100}$	$\frac{2K}{25}$	$\frac{3K}{50}$	$\frac{K}{100}$

¿Qué porcentaje de estudiantes obtuvo una nota menor que 60 puntos o mayor igual que 80 puntos?

a) 70% b) 25% c) 20%
d) 15% e) 30%

28. En la siguiente tabla de frecuencias, se registra el número de personas por rango de edad.
¿Cuántas personas son mayores a 21 años?

Edad	n
[10 – 14⟩	5
[14 – 18⟩	10
[18 – 22⟩	20
[22 – 26⟩	25
[26 – 30⟩	15
[30 – 34⟩	5

a) 25 b) 50 c) 30
d) 65 e) 45

29. Completar el siguiente cuadro de distribución de frecuencias de las notas de 16 alumnos en un examen de Matemática I.

Notas (l_i)	f_i	h_i	H_i	F_i
[3 , 6⟩	4	q		
[6 , 9⟩	m	0,25	a	
[9 , 12⟩	4	p		
[12, 15⟩	n	0,125		d
[15, 18⟩	Q	0,125		
Totales		b		

Calcular : (a + b + d)

a) 15 b) 11,5 c) 17,5
d) 14,5 e) 16,5

30. De la siguiente distribución de frecuencias:

Intervalo de Ingreso mensual	f_i	H_i
[; ⟩	1/K	K
[800 ; 1100⟩	2/K	
[1100 ; 1400⟩	9/K	
[1400 ; 1700⟩	3/K	

Calcular : ¿cuántas personas ganan entre S/. 840 y S/. 1480 mensuales, además determinar el valor de F_4 ?

a) 135 ; 225 b) 60 ; 225
c) 173 ; 225 d) 120 ; 225
e) 135 ; 250

31. Usando los datos de la tabla, que representa las velocidades registradas por 30 autos que pasaron por un mismo punto de control de velocidad.

l_i	[10,26⟩	[26 ,42⟩	[42,58⟩	[58,74⟩	[74,90⟩	[90,106⟩
f_i	4	12	7	4	2	1

David calculó la media armónica y obtuvo: (aprox.)

a) 35 b) 33 c) 37
d) 39 e) 31

32. Del siguiente cuadro :

Clase	f_i	F_i	h_i	H_i
[20, 30>		5	0,20	
[30, 40>				0,44
[40, 50>	8			
[50, 60>				

Calcule la diferencia entre la mediana y la moda.

a) 3 b) 3,5 c) 3,52
d) 3,125 e) 3,625

33. La siguiente tabla nos muestra la distribución de sueldos de una empresa.
Hallar $|a - b|$, si se sabe que el sueldo promedio de los trabajadores de la empresa es S/. 580.

Sueldo	Frecuencia Relativa
[300 ; 500>	a
[500 ; 700>	b
[700 ; 900>	0,2

a) 0 b) 0,2 c) 0,3
d) 0,4 e) 0,6

34. La tabla muestra la distribución del ingreso familiar correspondiente a 80 familias.
F_i = frecuencia absoluta acumulada.

f_i = frecuencia absoluta simple.

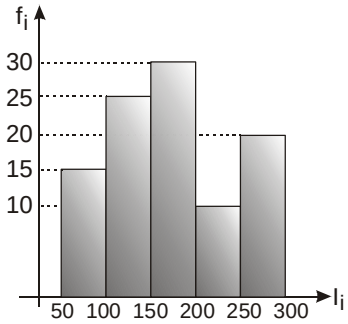
h_i = frecuencia relativa simple en tanto por uno.

Intervalo de Ingreso	f_i	F_i	h_i
[160 , 170>			
[170 , 180>	48	60	
[180 , 190>			0,125
[190 , 200>			0,075
[200 , 210>			

Determinar el número de familias que ganan menos de 200 nuevos soles.

a) 66 b) 76 c) 70
d) 50 e) 54

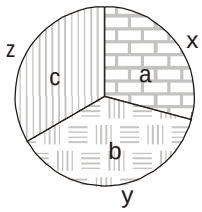
35. Dado el siguiente histograma de frecuencias absolutas:



Calcular el número de datos que se encuentran entre 75 y 125 y sumar con el número de datos que se encuentran entre 160 y 260.

a) 88 b) 48 c) 58
d) 68 e) 78

36. Se realizó una encuesta de las preferencias de un grupo de personas sobre 3 bebidas gaseosas x, y, z y se obtuvo el siguiente diagrama:



Donde : a, b y c representan números de personas y están relacionados de la manera siguiente :

$$\frac{210+a}{210-a} = \frac{240+b}{240-b} = \frac{150+c}{150-c} = K$$

Sabiendo que : K es entero y a, b y c los menores enteros positivos (K > 0).
Indique qué tanto por ciento del total, tiene la bebida gaseosa de mayor preferencia.

a) 20% b) 60% c) 40%
d) 55% e) 65%

37. En un salón de la Academia "TRILCE", se tiene los siguientes datos del peso de un grupo de alumnos :
Peso mínimo : 25 kg
Peso máximo : 75 kg
$H_4 = 0{,}92$; $f_4 = 6$; $n = 50$; $h_1 = h_5$ y $h_2 = h_4$
Calcular la mediana.
Dar como respuesta la suma de la mediana y el número de alumnos cuyo peso es menor que 65.

a) 48 b) 46 c) 44
d) 96 e) 90

38. Los siguientes datos representan el sueldo mensual en dólares de 18 trabajadores de la Academia "TRILCE" : 400 ; 450 ; 435 ; 380 ; 420 ; 430 ; 328 ; 350 ; 410 ; 400 ; 430 ; 420 ; 450 ; 420 ; 395 ; 415 ; 400 ; 420.
Si por "Fiestas Patrias" cada trabajador recibe un aumento del 21% en los sueldos más una bonificación de $25 y a la vez este aumento está afectado por un impuesto del 2,8%.
¿Cuál es el nuevo coeficiente de variabilidad?

a) 0,00732 b) 0,321 c) 0,0032
d) 0,0732 e) 0,3274

39. Reconstruir la siguiente distribución simétrica y determinar la media y la mediana muestral.

l_i	f_i	F_i	H_i
[10 , 12>	7		0,14
[12 , 14>			0,24
[14 , 16>			
[16 , 18>			
[18 , 20>			

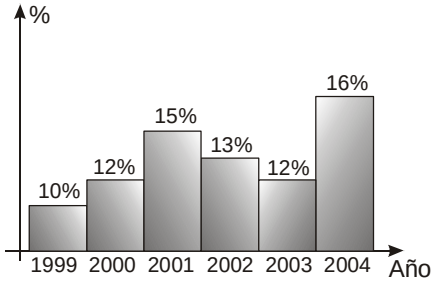
a) 15 ; 15 b) 14 ; 15
c) 15 ; 15,5 d) 14 ; 15,5
e) 14,5 ; 15

40. En el siguiente cuadro muestra la frecuencia de las edades de una muestra de gente joven. Calcule el tamaño de la muestra así como la frecuencia relativa del intervalo número 5.

	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa	Frecuencia Relativa Acumulada
[0 , 4>			
[4 , 8>			
[8 , 12>		0,3	
[12, 16>	20		0,85
[16, 20>	30		

a) 200 ; 0,20 b) 300 ; 0,30
c) 200 ; 0,05 d) 130 ; 0,15
e) 180 ; 0,10

41. El gráfico mostrado indica la variación porcentual de cada año del precio del dólar (tipo de cambio). Si al finalizar el año 2004, el dólar se cotizará a S/. 3,65. Determine la cotización al finalizar el año 1999.



a) 1,41 b) 1,92 c) 1,93
d) 2,50 e) 2,20

42. Determine la varianza de los siguientes datos :

x_i	f_i
2	10
4	20
7	30
9	20

a) 4 b) 5 c) 2,25
d) 2,368 e) 5,609

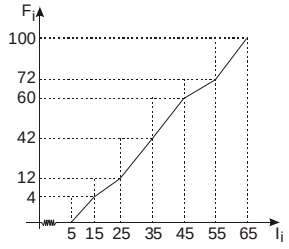
43. Se tiene el siguiente cuadro estadístico referente a las edades de $\overline{abc}$ personas.

l_i	f_i
[15 ; 25>	$\overline{ab}$
[25 ; 35>	$\overline{bc}$
[35 ; 45>	$\overline{ca}$
[45 ; 55>	$\overline{ac}$
[55 ; 65>	$\overline{cb}$
[65 ; 75>	$\overline{ba}$

Si se observa que todas las frecuencias absolutas son números pares.
Calcular cuántas personas tienen entre 30 y 60 años.

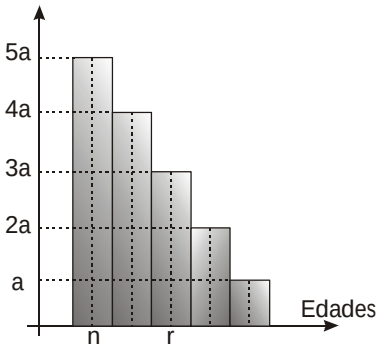
a) Es un número capicúa.
b) Es una cantidad cuadrada perfecta.
c) Es mayor que 110.
d) Hay 2 respuestas correctas.
e) Hay 3 respuestas correctas.

44. De la siguiente ojiva, calcule la media y la moda.



a) 39,7 ; 31,5 b) 39,7 ; 30
c) 41 ; 31,5 d) 41 ; 30,5
e) 38 ; 30

45. En un club deportivo, se tienen las edades de los hinchas distribuidas según el siguiente histograma de frecuencias.



Donde n y r son dos números, cuya suma, diferencia y el producto, están en la misma relación que los números 30 ; 12 ; 189 respectivamente.

Además : $a = \frac{n+r}{10}$

Calcule la edad promedio de los hinchas, sabiendo que la distribución se realiza en intervalos de igual ancho de clase.

a) 21 b) 17 c) 19
d) 23 e) 24

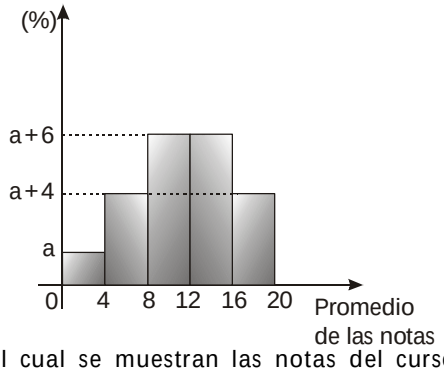
46. Si la moda de la variable aleatoria x es un número impar, hallar la M.A.

x_i	f_i
3	10
4	12
5	18+x
6	18+y
7	4
8	8
9	15
10	10
Total	100

$|x - y| = 1$

a) 5 b) 4 c) 6
d) 7 e) 6,3

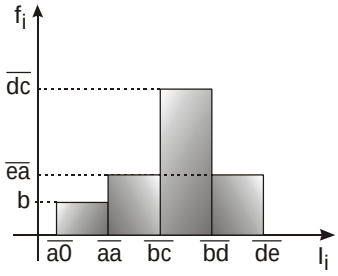
47. Según el gráfico siguiente :



En el cual se muestran las notas del curso de MATEMÁTICA I de un grupo de estudiantes universitarios, ¿qué porcentaje aprobó si el promedio aprobatorio es mayor que 10?

a) 47% b) 50% c) 53%
d) 52% e) 51%

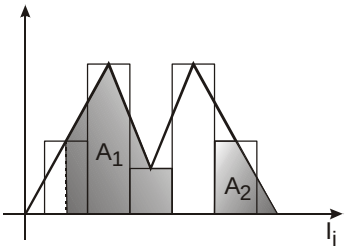
48. Dado el siguiente histograma, con ancho de clase constante.



Señale la suma de la moda y la mediana.

a) 147 b) 148 c) 149,74
d) 150 e) 150,7

49. De una distribución simétrica de ancho de clase constante, se obtiene el siguiente polígono de frecuencia.
Se sabe que $6A_1 = 17A_2$ y el total de datos es 54.

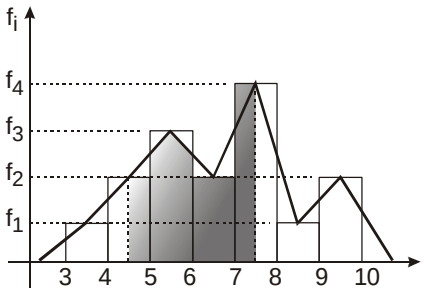


Señale la diferencia entre las frecuencias de la clase mediana y la clase modal.

a) 7 b) 8 c) 9
d) 15 e) 6

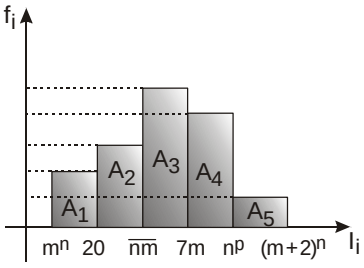
50. El área de la región sombreada es igual a la suma de todas las áreas de los rectángulos menos $45u^2$.
Hallar el menor valor que pueda tomar la mediana, si además :

$f_4 - f_2 = 18$ y $f_1 = 6$



a) 5,12 b) 7,08 c) 6,82
d) 7,12 e) 7,10

51. Según el siguiente histograma :



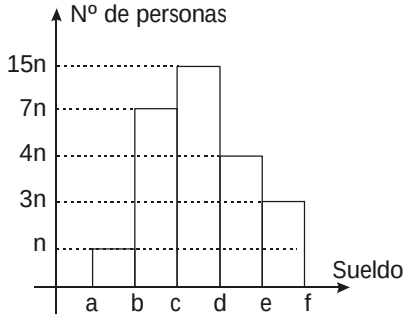
Se cumple :

$$A_1 + A_2 = A_4 + A_5$$

También el área bajo el polígono de frecuencia es $3A_3$.
Halle la mediana.

a) 22 b) 22,5 c) 23
d) 25 e) 26

52. En el siguiente histograma de ancho de clase común, se muestra los resultados de una encuesta.
Se pide estimar la cantidad de personas que hay en el intervalo $\left[\frac{2b+c}{3} ; \frac{2e+f}{3}\right]$, si la población es de 9000 personas.



a) 7400 b) 6000 c) 8400
d) 8100 e) 7000

53. Para estimar el peso promedio de los alumnos del Colegio Trilce, "XAV" eligió una muestra aleatoria de 100 alumnos; los pesos obtenidos se clasificaron en 5 intervalos de ancho común, luego YILDIRAY le ayudó a determinar la ojiva cuya gráfica se representa según la función:

$$F_{i(x)} = \begin{cases} 3x - 45 & ; x \in I_1 \\ v \cdot x + 5 & ; x \in I_2 \\ a \cdot x - 30 & ; x \in I_3 \\ n \cdot x - 75 & ; x \in I_4 \\ x + 35 & ; x \in I_5 \end{cases}$$

Determinar :

a) $x_2 + a + v$

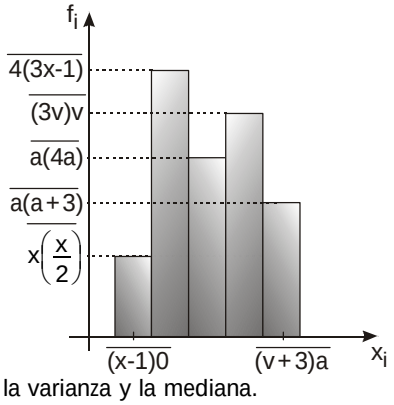
b) $f_3 + a + n$

c) $H_4 + h_2 + x_3$

Dé como respuesta la suma de cifras del mayor resultado obtenido :

a) 9 b) 8 c) 7
d) 6 e) 5

54. Se elaboró el siguiente histograma con la información que se obtuvo de las edades de un grupo de personas.



Calcule la varianza y la mediana.
Dar la suma, (aprox.)

a) 124,8 b) 129,6 c) 131,4
d) 133,7 e) 135,4

55. En una empresa, se realizó un censo a los trabajadores sobre sus años de servicio, resultando entre 4 y 34 años. YILDIRAY, un alumno Trilce, se da cuenta que al hacer el histograma las barras poseen cantidades de trabajadores que forman una progresión aritmética cuya razón es 2, una de las barras posee un área de $60u^2$ y la cantidad de intervalos es mínima, además el

ancho de clase es constante y posee 2 divisores.
Determinar la moda y la mediana.
Dé como respuesta la suma de ellos, si se sabe que : $\sum_{i=1}^{k} f_i$ es mínimo.
(k : número de intervalos)
a) 51,3 b) 35,60 c) 45,32
d) 47,30 e) 54,21

56. "XAV" ha elaborado una tabla de frecuencias con las siguientes características:

* Alcance : [2 ; 20]
* Ancho de clase : w = v + 2
* Número de datos : $n = Log[CA(N) + N]^{100} = \overline{xav}$
* $F_2 = \overline{(v+3)a}$; $F_3 = 60$; $F_5 = 3,\widehat{3}F_3$
* $\frac{f_1}{f_2} = \frac{7}{8}$; además la distribución es simétrica.

Calcular la desviación stándar y la moda, sabiendo que:

$N = 3 \cdot 15^k$ y $N \cdot \phi(N) = 2^3 \cdot 3^{k+3} \cdot 5^{k+1}$

a) 3,75 y 13 b) 3,08 y 11
c) 14,08 y 13 d) 2,83 y 11
e) 8 y 13

57. Dado el siguiente conjunto de datos :
120 ; 115 ; 70 ; 50 ; 63 ; 120 ; 75 ; 103 ; 119; 117 ; 95 ; 89 ; 57 ; 73 ; 85 ; 98 ; 102 ; 105 ; 63; 65.
Si se ordenan en 7 intervalos de clase iguales, se piden:
A. La suma del rango y el ancho de clase.
B. El porcentaje de datos que hay entre 50 y 90.

a) 80 ; 70% b) 70 ; 50%
c) 70 ; 60 % d) 80 ; 50%
e) 90 ; 50%

58. Se tiene el siguiente cuadro estadístico, en el cual las frecuencias absolutas forman una progresión aritmética.

l_i	f_i	h_i
[10; 20⟩		
[20; 30⟩		
[30; 40⟩	20	
[40; 50⟩		
[50; 60]		0,24

Un alumno distraído elabora la misma tabla, pero al hacerlo comete el error de aumentar cada dato en 5 unidades, si al elaborar dicha tabla observa que obtiene:

l_i	f_i	h_i
[10; 20⟩		
[20; 30⟩		
[30; 40⟩		
[40; 50⟩		0,24
[50; 60]		

Y con gran sorpresa, observa que una vez más las frecuencias se encuentran en progresión aritmética.
Determinar la suma de las dos medias aritméticas.

a) 79 b) 76 c) 82
d) 84 e) 86

59. Una compañía tiene 100 trabajadores entre nombrados, contratados y practicantes. Para los nombrados, el sueldo máximo es de S/. 7000 y el mínimo de S/. 2000 mensuales. El 4% son practicantes que reciben propinas menores de S/. 800 y el 26% de los trabajadores son contratados que perciben haberes mayores o igual que S/. 800 pero menores de S/. 2000; 20 trabajadores nombrados perciben haberes menores que S/. 3500 y el 80% del total de trabajadores tienen haberes inferiores a S/. 5000.
Calcular:
i) ¿Qué porcentaje de trabajadores ganan desde S/. 3500 hasta S/. 7000?
ii) ¿Qué cantidad de trabajadores ganan sueldos menores de S/. 3500?

a) 48% ; 52% b) 49% ; 51%
c) 50% , 50% d) 49% , 50%
e) 48% , 51%

60. En un cuadro de distribución de 4 intervalos de igual ancho de clase, se sabe que : $x_1 = 12$, $x_3 = 28$, $f_2 = 45$, $h_1 = h_3 = 0,25$
Si en total hay 120 datos, calcular su media aritmética.

a) 18 b) 22 c) 12
d) 10 e) 15

Claves

01.	c
02.	b
03.	c
04.	d
05.	d
06.	e
07.	d
08.	b
09.	c
10.	a
11.	d
12.	e
13.	d
14.	a
15.	e
16.	b
17.	c
18.	d
19.	a
20.	b
21.	e
22.	b
23.	a
24.	a
25.	c
26.	d
27.	e
28.	b
29.	a
30.	c

31.	c
32.	d
33.	b
34.	b
35.	c
36.	c
37.	d
38.	d
39.	a
40.	c
41.	c
42.	e
43.	e
44.	c
45.	b
46.	e
47.	c
48.	c
49.	c
50.	b
51.	e
52.	a
53.	d
54.	e
55.	e
56.	a
57.	d
58.	b
59.	b
60.	b

Capítulo

12 NUMERACIÓN

INTRODUCCIÓN

Se puede decir que la Matemática tomó forma de ciencia en la antigua Mesopotamia, donde los sumerios crearon la escritura cuneiforme (3,200 a.C.)
La civilización de Babilonia desarrollada en la antigua Caldea creó el sistema sexagesimal, aunque no conocían el cero utilizaban 2 símbolos 𒁹 = 1 y 𒌋 = 10.
Hasta que mucho tiempo después aparecieron los sistemas de numeración que utilizaban los dedos (decimal, quinario, duodecimal, vigesimal, etc).
Pero podemos decir que recién en el siglo V d.C. se fraguaron los orígenes de nuestro sistema de numeración (decimal). El principio de posición; ocasionó las nueve cifras y el cero aparece en la obra del matemático indio Brahmagupta.
Es decir, los hindúes crearon las cifras 0, 1, 2, 3, ..., 9; pero fueron los árabes los que difundieron estos símbolos por Europa.

NUMERACIÓN

Parte de la aritmética que se encarga de la forma correcta de expresar y representar a los números.

NÚMERO

Es un ente matemático que nos permite cuantificar a los objetos que nos rodean.

NUMERAL

Es la representación simbólica del número.

Mayas : • = 1 ; —— = 5 ; ☼ = 20
Romanos : I ; V ; X ; L ; C ; D ; M
Hindúes - Árabes : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9

Ejemplo :
"Cinco" se puede representar así :

𝍸 ; ⁘ ; 𝍷 ; — ; 5 ; 𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹 ; .... etc

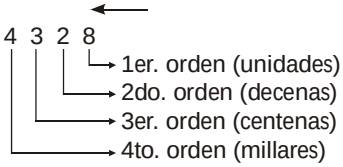
SISTEMA DE NUMERACIÓN

Conjunto de reglas y principios convencionales para representar un número.

PRINCIPIOS

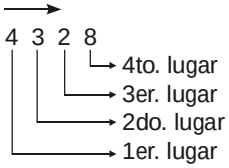
1. *DEL ORDEN :* Toda cifra en un numeral, tiene orden, por convención, se enumera de derecha a izquierda.
Por ejemplo :

4 3 2 8 ←
- 8 → 1er. orden (unidades)
- 2 → 2do. orden (decenas)
- 3 → 3er. orden (centenas)
- 4 → 4to. orden (millares)



Observación : También podemos encontrar el lugar que ocupa una cifra y se toma de izquierda a derecha.

→
4 3 2 8
- 8 → 4to. lugar
- 2 → 3er. lugar
- 3 → 2do. lugar
- 4 → 1er. lugar



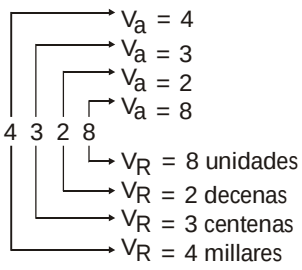
2. *DE LA BASE :* Todo <u>Sistema posicional de numeración</u> tiene una base, que es un número natural mayor que la unidad, el cual indica la cantidad de unidades necesarias para pasar de un orden al orden inmediato superior. En forma sencilla, la base nos indica la forma como debemos agrupar.

3. *DE SUS CIFRAS :* Las cifras son números naturales que siempre son menores que la base.
En base "n" las cifras pertenecen al conjunto :
{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ..... ; (n - 1)}

Observación : <u>Valor de sus cifras</u>

V_a : Valor Absoluto

V_R : Valor Relativo



4 3 2 8
- 8 → $V_a = 4$
- 2 → $V_a = 3$
- 3 → $V_a = 2$
- 4 → $V_a = 8$
- 8 → V_R = 8 unidades
- 2 → V_R = 2 decenas
- 3 → V_R = 3 centenas
- 4 → V_R = 4 millares

Algunos Sistemas Posicionales de Numeración

Base	*Sistema*	*Cifras a utilizar*
2	Binario	0, 1
3	Ternario	0, 1, 2
4	Cuaternario	0, 1, 2, 3
5	Quinario	0, 1, 2, 3, 4
6	Senario	0, 1, 2, 3, 4, 5
7	Heptanario	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
8	Octanario	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
9	Nonario	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
10	Decimal	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

REPRESENTACIÓN LITERAL DE UN NÚMERO

* Numeral de 2 cifras base 10

$\overline{ab} \in \{10; 11; 12; .....; 99\}$

* Numeral de 3 cifras base 5

$\overline{abc}_{(5)} \in \{100_{(5)}; 101_{(5)}; 102_{(5)}; ...; 444_{(5)}\}$

NUMERAL CAPICÚA : Aquel cuyas cifras equidistantes de los extremos del numeral son iguales.

Ejemplo : a ; $\overline{aa}$; $\overline{aba}$; $\overline{abba}$; $\overline{abcba}$

DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA

Consiste en expresar un número como la suma de sus valores relativos

Ejemplo :

$4326_{(7)} = V_R(4) + V_R(3) + V_R(2) + V_R(6)$

$4326_{(7)} = 4 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^1 + 6 \cdot 7^0$

En general :

$N = \overline{a_{k-1}a_{k-2}a_{k-3}....a_2a_1a_{0(n)}}$ numeral de "k" cifras de la base "n"

$$N = a_{k-1} \cdot n^{k-1} + a_{k-2} \cdot n^{k-2} + ... + a_1 \cdot k^1 + a_0$$

POR BLOQUES : Consiste en descomponer un numeral tomando convenientemente las cifras de 2 en 2, 3 en 3, etc.

Ejemplos :

$\overline{ababab}_{(n)} = \overline{ab}_{(n)} \cdot n^4 + \overline{ab}_{(n)} \cdot n^2 + \overline{ab}_{(n)}$.

$\overline{abcabc}_{(5)} = \overline{abc}_{(5)} \cdot 5^3 + \overline{abc}_{(5)}$

CAMBIO DE BASE

1. De base n a base 10

Ejemplo : *Expresar* $2132_{(6)}$ *en base 10*

"El método, consiste en descomponer polinómicamente el número"

$$2132_{(6)} = 2 \cdot 6^3 + 1 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + 2$$

$$2132_{(6)} = 432 + 36 + 18 + 2$$

$$2132_{(6)} = 488 \quad \textbf{\textit{Rpta}}$$

Otro método : (Ruffini)

	2	1 ↓+	3	2
6		→ 12	78	486
×	2	13	81	488

Rpta

2. De base 10 a base n

Ejemplo : *Expresar 435 a base 7*

"El método consiste en dividir sucesivamente entre 7, los residuos que van quedando, indican las cifras del orden respectivo".

435 | 7
(1) 62 | 7
(6) 8 | 7
(1) (1)

$\Rightarrow 435 = 1161_7$

3. De base n a base m

Ejemplo : Expresar $416_{(8)}$ a base 9

"El método, consiste en expresar primero en base 10 y luego dicho resultado a base 9".

	4 ↓	1 +	6 +
8		→ 32	264
	4	33	270

Luego 270 a base 9

270 | 9
(0) 30 | 9
(3) (3)

$\Rightarrow 416_{(8)} = 330_{(9)}$

Observación : "A mayor numeral aparente, menor base"

$416 > 330 \rightarrow 8 < 9$

Límite de un numeral $N_{(n)}$ ***de "k" cifras***

$$n^{k-1} \leq N_{(n)} < n^k$$

Ejemplos :

$$10^2 \le \overline{abc} < 10^3$$

$$6^3 \le \overline{abcd}_{(6)} < 6^4$$

PROPIEDADES

1. Numeral de k cifras máximas

$$\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)...(n-1)}}_{\text{k cifras}}{}_{(n)} = n^k - 1$$

Ejemplo : $777_{(8)} = 8^3 - 1$

2.

$$\overline{1a}_1\,\overline{1a}_2\,\overline{1a}_3\,\ldots\,\overline{1a}_{k(n)} = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k + n$$

Ejemplo :

$$12 \xrightarrow{+} 13 \xrightarrow{+} 14 \xrightarrow{+}{}_{(8)} = 2 + 3 + 4 + 8 = 17$$

3.

$$\overline{ab}\ \overline{ab}\ \overline{ab}\ \ldots\ \overline{ab}_{(n)} = a^k n + a^{k-1}b + a^{k-3}b + ... + a^2 b + a^1 b + b$$

(k veces)

CAMBIO DE BASE DIRECTO

Expresar $133_{(1000)}$ en la base 1001.

* $1000 - 1001 = -1$

	1	3	3
−1		−1	−2
	1	2	(1)
−1		−1	
	(1)	(1)	

$\Rightarrow 133_{(1000)} = 111_{(1001)}$

¿Por qué se puede aplicar el método de Ruffini para realizar el cambio de base directo?

Ejercicios :

* Expresar $2531_{(5000)}$ en base 5002.

* Expresar $3001_{(2500)}$ en base 2503.

CASOS ESPECIALES DE CAMBIO DE BASE :

I. De base n a base n^k : Se toma el numeral de la base "n" y se separa de derecha a izquierda grupos de "k" cifras. Enseguida, a cada grupo se aplica descomposición polinómica.

Ejemplo :

$11011011101_{(2)}$ a base 8

Resolución :

Base 2 a base $8 = 2^3 \longrightarrow k$

$$11|011|011|101_{(2)}$$

Luego :

$11_{(2)} = 1\times 2 + 1 = 3$

$011_{(2)} = 1\times 2 + 1 = 3$

$101_{(2)} = 1\times 4 + 1 = 5$

Entonces : $11011011101_{(2)} = 3335_{(8)}$ ***Rpta***

Ejercicio :

* Convertir $2120110122_{(3)}$ a base 9

II. De base n^k a base n : Se toma cada una de las cifras de la base n^k y se convierte a base n, tratando de obtener grupos de "k" cifras, si algún grupo no tiene "k" cifras se completa con ceros a la izquierda.

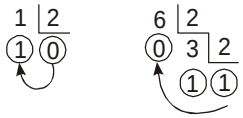
Ejemplo :

$72416_{(8)}$ a base 2

Base $8 = 2^3$ a base 2

Cada una de las cifras de la base 8, se convierten a base 2.

7 | 2	2 | 2	4 | 2
(1) 3 | 2	(0) (1)	(0) 2 | 2
(1) (1)		(0) (1)
$111_{(2)}$	$010_{(2)}$	$100_{(2)}$



$001_{(2)}$ $110_{(2)}$

Luego :

$$72416_{(8)} = 111010100001110_{(2)}$$

Ejercicio :

Convertir $(15)3482_{(16)}$ a base 4

DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA PARA NÚMEROS POSITIVOS MENORES QUE LA UNIDAD

$$0,a_1a_2a_3.....a_{n(k)} = \frac{a_1}{k^1} + \frac{a_2}{k^2} + \frac{a_3}{k^3} + ... + \frac{a_n}{k^n}$$

Ejemplos :

* $0,24_{(5)} = \frac{2}{5^1} + \frac{4}{5^2}$
* $0,371_{(8)} = \frac{3}{8^1} + \frac{7}{8^2} + \frac{1}{8^3}$

Curiosidad Matemática

Escoja un número cualquiera de la tabla; por ejemplo el 22, ¿Dónde se encuentra? ... en la primera, en la tercera y cuarta columna, entonces considerando sólo la primera fila se cumple :

$$22 = 16 + 4 + 2$$

¡No entiende! ... entonces hagamos otro ejemplo el número 13, se encuentra en la segunda, tercera y quinta columna entonces :

$$13 = 8 + 4 + 1$$

Explique como se forma esta tabla utilizando ***Numeración***

16	8	4	2	1
17	9	5	3	3
18	10	6	6	5
19	11	7	7	7
20	12	12	10	9
21	13	13	11	11
22	14	14	14	13
23	15	15	15	15
24	24	20	18	17
25	25	21	19	19
26	26	22	22	21
27	27	23	23	23
28	28	28	26	25
29	29	29	27	27
30	30	30	30	29
31	31	31	31	31

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Si los numerales están correctamente escritos.
Dar : (a + b . c)

$$\overline{3a}_{(b)} \ ; \ 55_{(a)} \ ; \ \overline{b3}_{(c)} \ ; \ \overline{2c}_{(9)}$$

a) 73 b) 62 c) 56
d) 82 e) 64

02. Si los siguientes números son diferentes de cero:

$$\overline{10a}_{(4)} \ ; \ \overline{2bc}_{(a)} \ ; \ \overline{bb}_{(c)}$$

Determinar : $\frac{a \cdot c}{b}$

a) 6 b) 5 c) 4
d) 3 e) 7

03. Si : $15425_{(a)} = \overline{a1}_{(b)} \cdot \overline{b3}_{(8)}$
Hallar : $\overline{ab}$

a) 67 b) 65 c) 39
d) 26 e) 13

04. Convertir el mayor número de 4 cifras del sistema senario al sistema nonario.

a) $1881_{(9)}$ b) $1500_{(9)}$ c) $1616_{(9)}$
d) $1688_{(9)}$ e) $1661_{(9)}$

05. ¿Cómo se escribe en el sistema quinario el menor número de 3 cifras del sistema heptanario?

a) $122_{(5)}$ b) $144_{(5)}$ c) $143_{(5)}$
d) $140_{(5)}$ e) $124_{(5)}$

06. Expresar el menor número de 3 cifras diferentes del sistema quinario al sistema ternario.
Dar la suma de sus cifras.

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

07. El mayor número de tres cifras que está en base "x" se escribe en el sistema heptanario como 425.
Hallar el valor de "x".

a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9

08. ¿En qué sistema de numeración, el número 176 (de base 10) se escribe 128?
Indique la base.

a) 11 b) 9 c) 12
d) 13 e) 14

09. Dar "x" en :

$$\overline{43x}_{(5)} = \overline{xx6}$$

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

10. Calcular : (x + n) en :

$$\overline{xxx}_{(n)} = \overline{27x}$$

a) 12 b) 11 c) 13
d) 10 e) 14

11. Si : $1564_{(n-1)} = 1172_{(n)}$
Hallar : n

a) 6 b) 7 c) 9
d) 8 e) 4

12. Si $354_{(n+1)} = 455_{(n)}$.
Determinar el valor de "n"

a) 9 b) 8 c) 7
d) 6 e) 10

13. Hallar : $a \times b$
Si : $\overline{20a5}_{(b)} = 701_{(8)}$

a) 7 b) 8 c) 9
d) 10 e) 12

14. Hallar la suma de las bases en las cuales los números 444 y 124 son iguales.

a) 18 b) 12 c) 17
d) 16 e) 20

15. Expresar 2531_{5000} en base 5002.
Dar como respuesta una de las cifras obtenidas.

a) 5 b) 4 c) 6
d) 8 e) 9

16. Expresar 35423_{1498} en base 1500.
Dar la suma de sus cifras (en base 10).

a) 3000 b) 3002 c) 3001
d) 2341 e) Imposible

17. Si un número se escribe en base 10 como $\overline{xxx}$ y en base 6 como $\overline{aba}$, entonces : a + b + x es igual a :

a) 6 b) 2 c) 3
d) 5 e) 4

18. $\overline{aa}$, $\overline{bb}$, $\overline{cc}$ y $\overline{abc}$, son numerales tales que letras diferentes son cifras diferentes y ninguna es cero.
Si : $\overline{aa} + \overline{bb} + \overline{cc} = \overline{abc}$, el valor de : a + b + c es :

a) 19 b) 18 c) 17
d) 15 e) 20

19. Si se cumple que $\overline{aab}_{(6)} = \overline{b1b}$, el valor de a + b es :

a) 7 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

20. Al responder una encuesta, un ganadero escribe en la ficha lo siguiente :

Nº de toros	:	24
Nº de vacas	:	32
Toda de cabezas	:	100

La base del sistema de numeración que utiliza el ganadero es :

a) 8 b) 9 c) 5
d) 6 e) 7

21. "A" es el conjunto de los números de 2 cifras en base 7; "B" es el conjunto de los números de 3 cifras en base 4. El número de elementos que tiene la intersección de "A" y "B" es :

a) 21 b) 33 c) 25
d) 35 e) Mayor que 35

22. ¿Cuántas cifras tiene el número :

$A = \underbrace{777.....77}_{100 \text{ cifras}}{}_{(8)}$ al ser expresado en base 10?

a) 87 b) 88 c) 89
d) 90 e) 91

23. Un granjero vende huevos en cajas de 12 unidades. De la producción de una semana se tiene 4 gruesas, 3 docenas y 8 huevos.
¿Cuál es este número si le hacen un pedido que debe entregar en cajas de 9 unidades?

a) $573_{(9)}$ b) $640_{(9)}$ c) $681_{(9)}$
d) $758_{(9)}$ e) $768_{(9)}$

24. Si a un número entero de 6 cifras que empieza con uno (1), se le traslada este uno a la derecha de la última cifra, se obtiene otro número que es el triple del primero. El número inicial es :

a) 142867 b) 142857 c) 114957
d) 155497 e) 134575

25. El mayor número de 3 cifras en base "b" es llevado a la base "b + 1".
¿Cuál será la cifra correspondiente a las unidades de orden 1, del número escrito en la base "b + 1"?

a) 1 b) 2 c) 3
d) n e) b – 1

26. Si a, n son soluciones de la ecuación :

$$\overline{(2a)(2a)(2a)}_{(8)} = \overline{a06}_{(n-1)}$$

Entonces a + n es igual a :

a) 11 b) 13 c) 14
d) 15 e) 16

27. Si : $\overline{(2a)(2a)(2a)}_{8} = \overline{a06}_{\overline{(bc)}}$
Hallar : (m + n) en :

$$\overline{mn3}_{(c^2)} = \overline{2(n-1)m}_{(2a-1)}$$

a) 8 b) 5 c) 11
d) 6 e) 7

28. Si : $\overline{ab00}_{(5)} = \overline{c0c}_{(8)}$
Hallar : a + b + c

a) 9 b) 8 c) 7
d) 11 e) 10

29. Hallar : a + b + c
Si : $\overline{6aa}_{(c)} = \overline{4bb}_{(8)}$

a) 15 b) 14 c) 16
d) 17 e) 18

30. Si se cumple que :

$$\overline{aba}_{(7)} = \overline{ccb}_{(9)} = \overline{d8b}$$

Calcular : (a + b + c + d)

a) 7 b) 8 c) 10
d) 11 e) 13

31. Si el numeral :

$$\overline{(a-3)(a+2)(a-3)(a+2)....(a-3)(a+2)}_{(8)}$$

Es convertido a la base 17, se observa que la suma de sus cifras es una cantidad par.
Hallar : "a"

a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8

32. Si el número a = 20034001100010003 (escrito en base n) se convierte al sistema de numeración de base n^4 ; obtenemos un número cuya tercera cifra, leída de derecha a izquierda, es 6.
Entonces el valor de n es :

a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9

33. Si se sabe que :

$$N = \overline{(a+b)8(4a-1)}_9 = \overline{pqmb21}_3$$

Calcule la cifra del menor orden al expresar N en el sistema octanario.

a) 4 b) 0 c) 3
d) 2 e) 7

34. Si : $\overline{(ab_4)(cd_6)(ce_5)}_9 = \overline{memmm0}_3$

Calcular : a + b + c + d + e + m

a) 10 b) 11 c) 12
d) 13 e) 14

35. Si : $\overline{(a-5)a(a+5)}_{(36)} = \overline{152433}_{(b)}$; b < 10 < a

Hallar : (a − b)

a) 6 b) 7 c) 8
d) 9 e) 10

36. $\overline{n01}$ y $\overline{n32}$ son números de tres cifras y $\overline{n1}$ es un número de dos cifras, todos ellos escritos en el sistema de base n + 1.
Si : $\overline{n01} + \overline{n1} = \overline{n32}$
¿Cuál es el número $\overline{n01}$ escrito en el sistema decimal?

a) 40 b) 42 c) 49
d) 50 e) 52

37. La edad de un abuelo es un número de dos cifras y la edad de su hijo tiene los mismos dígitos, pero en orden invertido. Las edades de dos nietos coinciden con cada una de las cifras de la edad del abuelo.
Se sabe, además, que la edad del hijo es a la edad del nieto mayor como 5 es a uno.
Hallar la suma de las cifras de la edad de la esposa del hijo, sabiendo que dicha edad es la mitad de la edad del abuelo.

a) 7 b) 8 c) 14
d) 10 e) 4

38. Cierta cantidad de dinero que fluctúa entre S/. 120 y S/. 150 es repartida entre 6 personas, de tal manera que las cantidades que ellas reciben son todas diferentes, mayores o iguales a 10 y menores que 100. Si las cantidades recibidas por cada una de las personas, se pueden expresar usando las cifras a, b y 0 (a y b diferentes de cero).
Hallar : a + b

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

39. Marcar con "V" o "F" según lo expuesto sea Verdadero o Falso :
* El menor sistema de numeración es el unario.
* Hay infinitos sistemas de numeración.
* En el sistema de numeración de base "b" hay $(b-1)\cdot b^n$ números de "n" cifras.
* La cifra de vigésimo orden de un número es la decena de trillón.

a) VVFV b) FVVF c) FVFV
d) VFFF e) FVFF

40. Se dispone de una balanza de 2 platillos y de la siguiente colección de pesas : 1g ; 3^2g ; 3^4g ; 3^6g ; ....
¿Cuántas pesas como mínimo se deben usar para pesar 1027 gramos de arroz si hay sólo 5 pesas de cada valor?

a) 9 b) 6 c) 11
d) 12 e) 5

41. ¿Cuántos números enteros x tienen como producto de cifras $x^2 - 11x + 10$?

a) 0 b) 1 c) 10
d) 6 e) 5

42. Hallar la suma de las cifras de la suma de todos los números enteros "x" cuyo producto de cifras sea : $x^2 - 11x - 10$?

a) 1 b) 3 c) 6
d) 12 e) 24

43. Encontrar todos los números naturales x, tales que el producto de sus cifras en el sistema decimal sea igual a $x^2 - 10x - 22$.
Dar la suma de sus cifras.

a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

44. Un numeral escrito en el sistema binario tiene 12 cifras. ¿Cuántas cifras puede tener en el sistema nonario?

a) 10 b) 4 c) 8
d) 6 e) 5

45. Si 2^{91} se convierte a la base once, ¿cuántas cifras tiene en esa base?

a) 20 b) 22 c) 24
d) 26 e) 27

46. Calcule el valor de : $\overline{ab}\,\overline{ab}\,\overline{ab}_{(a+b)}$

Sabiendo que : $\overline{(a-3)a(a+4)}_{b} = \overline{(a-3)(a-4)a}_{11}$

a) 1021 b) 400 c) 1600
d) 133 e) 275

47. Si se cumple que :

$$\overline{abcd}_{(k^3)} = \overline{(k^3-1)1(d-6)}$$

Determinar la suma de todos los números de 3 cifras que se pueden formar con a; b y c.

a) 6438 b) 8926 c) 8346
d) 3924 e) 3864

48. Se tiene : $\overline{(a-3)1caa}_{(b)} = \overline{aba3}_{(8)}$
Donde "a" es impar.
Determinar en cuántos sistemas de numeración el numeral $\overline{abc}$, se expresa con 4 cifras.

a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

49. Si : $\overline{aaaa}_{(n)} = \overline{aa}_{(n+k)}$
Hallar "n" mínimo, siendo "k" el menor número cuyas dos cifras de menor orden son cifras no significativas.
Dar como respuesta la suma de cifras.

a) 1 b) 3 c) 4
d) 5 e) 7

50. Si : $\overline{a0(a-1)a}_{(4)} = \overline{bc0}_{(a+b)}$

y : $\overline{eee}_{(d)} = \overline{dc}_{(a)}$
Hallar :

E + a + b + c + d + e

a) 10 b) 11 c) 12
d) 14 e) 13

51. Si :

$$\overline{xxyz}_{(7)} = \overline{12}_{16}\ \overline{1(12)}\ \overline{1(20)}\ \cdots\ \overline{1n}_{\overline{(k6)}}$$

"w" veces

Donde "n" es máximo.
Hallar : "x + y + z + w + k + n" y dar como respuesta la suma de sus cifras.

a) 10 b) 11 c) 12
d) 13 e) 9

52. Si :

$$\overline{mnpq003}_{\overline{ab}\,\overline{ac}\,\overline{ab}\,\overline{ac}\,\cdots\,\overline{ac}_{z}} = \overline{(15)(15)(15)0(y-2)}_{30}$$

"2m" numerales

Además : $\overline{ayya}_8 = \overline{(x^3)(x+5)(x+1)}$

Hallar : a + b + c + z

a) 16 b) 20 c) 21
d) 22 e) 23

53. Si : $\overline{adec}_7 = \overline{b(3b)c}_{11}$

Además :

$$\overline{d(a+b)} = \overline{PPPP}_R + 12$$

$\overline{d(a+b)}$ b veces $\overline{d(a+b)}_{(d^e)}$

¿Cuántas cifras tiene el número $\underbrace{\overline{bebe.....be}}_{\overline{dada}\ \text{cifras}}{}_{(2d)}$ cuando se representa en el sistema decimal?

a) 1270 b) 4242 c) 2121
d) 1276 e) 1277

54. Hallar (a + b + c + d) si :

$$\overline{abcdabcd}_{(5)} = \overline{24664d}$$

a) 4 b) 3 c) 2
d) 10 e) 0

55. Si se sabe que : $\overline{12a}_b = \overline{ae}_d$ (b es par)

Calcular : $\overline{da}_8 + \overline{\left(\frac{e}{2}\right)\left(\frac{e}{3}\right)}$

a) 72 b) 76 c) 84
d) 90 e) 91

56. Sabiendo que el conjunto A tiene "n" elementos y en total tiene $\overline{abcd}$ subconjuntos, donde : a, b, c, d son cifras pares.

Dar la cifra de mayor orden al convertir el numeral $\overline{cba}$ a la base "d".

a) 2 b) 4 c) 5
d) 6 e) 8

57. Si se cumple que :

$$\overline{abcd}_7 = \overline{dcba}_{11}$$

Además a, b, c, d son diferentes entre sí.
Hallar :

a + b + c + d

a) 10 b) 11 c) 12
d) 13 e) 15

58. ¿Cuántas cifras tiene FFF...FFH de 5000 cifras al ser expresado en el sistema de numeración decimal?

a) 6021 b) 6019
c) 6023 d) 6022
e) Mal propuesto

59. ¿Cuál es el menor número entero "x", tal que restándole una unidad a su primera cifra de la izquierda "n", y aumentándole una unidad se obtenga el producto de (n + 2) por el número "x" después de suprimir la cifra n?.
Dar como respuesta la cifra orden cero.

a) 3 b) 2 c) 6
d) 4 e) 8

60. Hallar el sistema de numeración de base 6 todos los números de cinco cifras, tales que todas sus potencias de exponente entero terminen en las mismas cinco cifras.
Dar la suma de cifras de uno de los números que cumplen lo anterior.

a) 11 b) 7 c) 4
d) 21 e) 12

Claves

01.	b
02.	a
03.	a
04.	d
05.	b
06.	a
07.	b
08.	c
09.	b
10.	a
11.	d
12.	c
13.	e
14.	a
15.	c
16.	c
17.	e
18.	b
19.	a
20.	d
21.	b
22.	e
23.	d
24.	b
25.	b
26.	e
27.	d
28.	e
29.	a
30.	d

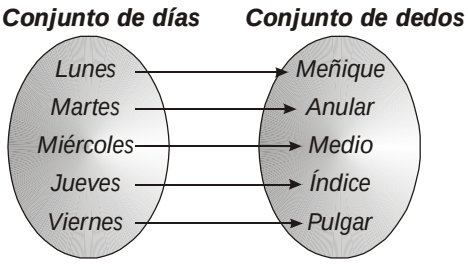
31.	a
32.	a
33.	c
34.	a
35.	e
36.	c
37.	b
38.	d
39.	c
40.	a
41.	b
42.	b
43.	b
44.	b
45.	e
46.	a
47.	e
48.	c
49.	a
50.	b
51.	a
52.	e
53.	d
54.	d
55.	e
56.	d
57.	c
58.	a
59.	a
60.	a

Capítulo

13 CONTEO DE NÚMEROS

INTRODUCCIÓN

Contar significa establecer una relación entre dos colecciones de objetos de tal modo que a cada objeto de una colección se le haga corresponder uno de otra colección.
Por ejemplo, cuando un alumno cuenta los días de la semana que asiste a clases a su colegio hace corresponder a cada día un dedo de su mano, estableciéndose así una aplicación, es decir a cada día le corresponde un dedo.



SUCESIÓN

Se llama sucesión a toda aplicación del conjunto de números enteros positivos en el conjunto de los números reales R. Sus elementos se representan : a_1 ; a_2 ; a_3 ; ..... ; a_n donde nos indican el primero, segundo, el tercero y así sucesivamente. Si aparece el último término se dice término enésimo y la sucesión es finita, si no aparece es infinita.

NÚMEROS EN SUCESIÓN NUMÉRICA

1. Progresión Aritmética

$$18 \;;\; 20 \;;\; 22 \;;\; 24 \;;\; 26$$
$$+2 \quad +2 \quad +2 \quad +2$$

Es una sucesión numérica de 5 términos donde el primero es 18 y los siguientes se obtienen aumentando 2 al anterior; a esta sucesión se le llama sucesión aritmética o progresión aritmética.

El término de lugar "n" será : $a_n = 16 + 2n$

2. Progresión Geométrica

$$9 \;;\; 45 \;;\; 225 \;;\; 1125 \;;\; .....$$
$$x5 \quad x5 \quad x5$$

Es una sucesión numérica donde cada término se obtienen multiplicando por 5 al término anterior; a esta sucesión, se le llama sucesión geométrica o progresión geométrica.

El término de lugar "n" será : $a_n = 9 \cdot 5^{n-1}$

SUCESIÓN ARITMÉTICA DE PRIMER ORDEN O LINEAL (Progresión Aritmética)

Se llama así a aquella sucesión donde la diferencia entre dos términos consecutivos es siempre la misma; es decir cada término se obtiene agregando una cantidad constante al término que le precede, a dicha cantidad se le llama razón de la progresión aritmética.

Ejemplos :

1. $8 \;;\; 17 \;;\; 26 \;;\; ..... \;;\; 206$
$+9 \quad +9$

2. $94 \;;\; 90 \;;\; 86 \;;\; ..... \;;\; 14$
$-4 \quad -4$

En General :

$$a_1 \;;\; a_2 \;;\; a_3 \;;\; ..... \;;\; a_n$$
$$r \quad r$$

Se deduce que :

I. RAZÓN (r) : Es la diferencia de dos términos consecutivos de la progresión aritmética.

$$r = a_k - a_{k-1}$$

II. TÉRMINO ENÉSIMO (a_n)***:*** La siguiente fórmula se utiliza para hallar un término cualquiera de la progresión.

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

"n" es el lugar que ocupa el término que se quiere calcular.

III. NÚMERO DE TÉRMINOS (n)

$$n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$$

Donde :

a_n : término de lugar n

a_1 : primer término

r : valor de la razón

Aplicación : En la siguiente sucesión aritmética, calcule la razón, su cantidad de términos y los términos de lugar 23 y 37.

S : 23 ; 30 ; 37 ; ..... ; 506

Resolución :

* r = 30 - 23 = 7

* $n = \frac{506 - 23}{7} + 1 = 70$

* $a_{23} = 23 + 22(7) = 177$

* $a_{37} = 23 + 36(7) = 275$

CONTEO DE CIFRAS

Consiste en calcular el número de cifras de una sucesión numérica.

Ejemplo :

Calcule el número de cifras de :

37 ; 40 ; 43 ; ..... ; 214

Resolución :

* Del 37 al 97 hay $\frac{97 - 37}{3} + 1 = 21$ números de dos cifras tenemos : 21×2 = 42 cifras.

* Del 100 al 214 hay $\frac{214 - 100}{3} + 1$ = 39 números de tres cifras tenemos 39×3 = 117 cifras.

Entonces en total hay 42 + 117 = 159 cifras

PAGINACIÓN

Al imprimir un libro, periódico, etc. antiguamente se utilizaba en la tipografía por cada letra o símbolo un tipo de imprenta.

Ejemplo :

Diga Ud. la cantidad de tipos de imprenta que se utilizan para enumerar las páginas de un libro de 248 páginas.

Resolución :

Del 1 al 9 hay 9 páginas, del 10 al 99 hay 90 páginas, de 100 al 248 hay 149 páginas entonces en total hay :

$$9 \times 1 + 90 \times 2 + 149 \times 3 = 636 \text{ cifras}$$

Nota : Para un libro de "p" páginas el número de cifras o tipos de imprenta utilizado es :

$$\text{Nº cifras} = (p+1)k - \underbrace{111...111}_{\text{k cifras}}$$

k : número de cifras de "p"

En el ejemplo anterior p = 248 y k = 3 entonces el Nº de cifras es :

(248 + 1) . 3 - 111 = 636 ***Rpta.***

NÚMEROS CONDICIONADOS

Son aquellos que presentan algunas características entre sus cifras.

Principio de la Multiplicación : Si un evento ocurre de "n" maneras diferentes y otro evento ocurre de "m" maneras diferentes, entonces ambos eventos pueden ocurrir de $(n \times m)$ formas diferentes.

Ejemplo de Aplicación : ¿Cuántos números pares de 3 cifras empiezan con 8 ó 5?

Resolución :

$\overline{a\,b\,c}$ → Par (c = Par)

	a	b	c
Valores que toma cada cifra	5	0	0
	8	1	2
		2	4
		⋮	6
		⋮	8
		9	
	2	x10	x5

= 100 números

EJERCICIO :

¿Cuántos números de "k" cifras existen en base n?

Resolución :

Como la primera cifra toma (n – 1) valores y las restantes (k – 1) cifras toman "n" valores hay

$(n-1) \cdot \underbrace{n \cdot n \cdot ..... \cdot n}_{(k-1)} = (n-1) \cdot n^{k-1}$ números

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. En una progresión aritmética, la suma del décimo y duodécimo término es 20, además el sexto término es cero.
Hallar el vigésimo término.

a) 28 b) 26 c) 30
d) 32 e) 36

02. La siguiente sucesión de números consta de 48 términos dándose los cuatro términos centrales : ..... ; 442 ; 449 ; 456 ; 463 ; .....
Determinar el primer término.

a) 288 b) 295 c) 302
d) 281 e) 274

03. Si la diferencia de los términos de lugares 65 y 40 de una progresión es 175 y que el término de lugar 20 es 223.
Entonces, el término de lugar 100 de la progresión es :

a) 783 b) 728 c) 713
d) 736 e) 740

04. En la progresión aritmética, el décimo primer término es 216.
S : (a + b) ; (4a - 3b) ; (5b + 3a) ; .....
Dar : (a + b)

a) 12 b) 16 c) 20
d) 24 e) 18

05. ¿Cuántas cifras se emplean al escribir la siguiente progresión aritmética?
40 ; 46 ; 52 ; ..... ; 1198

a) 606 b) 584 c) 602
d) 579 e) 624

06. ¿Cuántas cifras se utilizan al enumerar la secuencia?
10^{311} ; 10^{321} ; 10^{331} ; ..... ; 10^{771}

a) 235 b) 1890 c) 245
d) 575 e) 85

07. ¿Cuántos números de 3 cifras del sistema decimal usan alguna cifra 5 en su escritura?

a) 225 números b) 252 números
c) 255 números d) 648 números
e) 336 números

08. ¿Cuántos enteros que se expresan mediante numerales de cuatro cifras de la forma : $\overline{\left(\frac{a}{2}\right)(b+3)(b-1)(a+3)}$ en base 20 existen?

a) 128 b) 150 c) 135
d) 138 e) 155

09. Si los tres primeros términos de la progresión geométrica de razón igual a 12 son :
$$\frac{1}{3(a-b)} ; \frac{4}{a^2-b^2} ; \frac{48}{a+b}$$
El cuarto término será :

a) 96 b) 576 c) 144
d) 72 e) 652

10. Tres números están en progresión aritmética cuya razón es 2.
¿Cuál es el valor del segundo término, si es que; al disminuir el primero en 3 unidades, disminuir el segundo en 2 y duplicar el tercero, los números resultantes están en progresión geométrica?

a) 8 ó – 2 b) 6 ó – 4 c) 4 ó – 6
d) 2 ó – 8 e) 6 ó 4

11. La suma de los dos primeros términos de una progresión aritmética es la solución positiva de la ecuación :
$x^2 + 6x - 55 = 0$ y el 5to. término es 13.
Hallar la razón de la progresión.

a) 2 b) 2,5 c) 3
d) 4 e) 1

12. Se tiene una progresión aritmética en la cual dos términos consecutivos son : $\overline{ab1}$ y $\overline{ab4}$ y donde el primer término es 11 y el último es 902.
Hallar cuántos términos hay en dicha progresión.

a) 296 b) 297 c) 298
d) 299 e) 300

13. $a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4$ son números naturales en progresión aritmética.
Si : $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 26$ y
$a_1 a_2 a_3 a_4 = 880$.
Calcular :
$$N = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$$

a) 184 b) 214 c) 216
d) 218 e) 195

14. Dada la sucesión aritmética: 60 ; 53 ; 46 ; .....
El primer término negativo, es :

a) – 10 b) – 3 c) – 11
d) – 5 e) – 2

15. Las edades de 3 personas están en progresión aritmética creciente, cuya suma es 63. Si la suma de sus cuadrados es 1395; la edad del mayor, es :

a) 27 b) 26 c) 21
d) 35 e) 37

16. La suma del cuarto y el octavo término de una progresión aritmética es 20, el 31 término es el doble del 16 término; la progresión aritmética es :

a) – 5 ; – 2 ; – 1 ; .....
b) 5 ; 6 ; 7 ; .....
c) 0 ; 2 ; 4 ; .....
d) 0 ; 3 ; 6 ; .....
e) 2 ; 4 ; 6 ; .....

17. De los tres primeros términos de una progresión aritmética, el término intermedio es 15 y el producto de los mismos es 2415.
Entonces el término del décimo primer lugar es :

a) 76 b) 77 c) 87
d) 97 e) 98

18. Una persona empieza a numerar páginas desde el número 4000 y se detiene en el número que representa la cantidad de dígitos utilizados.
Dar la suma de los cuadrados de las cifras del último número escrito.

a) 42 b) 47 c) 52
d) 54 e) 59

19. Se llama capicúa al número de varias cifras que se lee igual de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. ¿Cuántos números capicúa hay entre 100 y 1000?

a) 500 b) 10 c) 90
d) 200 e) 100

20. Dada la siguiente sucesión .
1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; .....
El número que sigue es :

a) 24 b) 14 c) 34
d) 15 e) 11

21. ¿Cuántos números de 3 cifras existen que tengan por lo menos una cifra par y por lo menos una cifra impar?

a) 225 b) 675 c) 325
d) 425 e) 825

22. ¿Cuántos términos de tres cifras (en base n) tiene la siguiente progresión aritmética?

$$20_n \ ; \ 25_n \ ; \ 33_n \ ; \ ..... \ ; \ 201_n$$

a) 10 b) 11 c) 12
d) 13 e) 14

23. ¿En cuántos sistemas de numeración el número 1234 se escribe con 3 cifras?

a) 10 b) 15 c) 30
d) 25 e) 20

24. Si de los números del 1 al 1000, no se marca ni un solo número que contenga la cifra 4 o la cifra 7.
¿Cuántos números se marcan?

a) 506 b) 510 c) 511
d) 512 e) 515

25. ¿Cuántos términos como máximo tiene la siguiente progresión?

$$14 \ ; \ 23 \ ; \ 32 \ ; \ ..... \ ; \ \overline{abc}$$

Si además se sabe que : a + b + c = 14

a) 109 b) 105 c) 121
d) 100 e) 96

26. Se tiene la siguiente progresión aritmética:

$$\underbrace{\overline{bb} \ ; \ \overline{bb}+b \ ; \ \overline{bb}+2b \ ; \ ..... \ ; \ 609}_{\overline{bb} \text{ términos}}$$

Indicar el valor de b

a) 3 b) 6 c) 7
d) 9 e) 1

27. Si el primer término de una progresión aritmética de enteros consecutivos es k^2+1; la suma de los $2k+1$ primeros términos de dicha progresión puede ser expresada como :

a) $(k+1)^2$ b) $2(k+1)^3$
c) $k^3+(k+1)^3$ d) $(k-1)^3+k^3$
e) k^3+3k^2+3k+1

28. Dada la progresión aritmética, en el sistema de numeración que se indica :

$$102_{(3)} \ ; \ 111_{(3)} \ ; \ 120_{(3)} \ ; \ .....$$

La suma de los 8 primeros términos, es :

a) $21100_{(3)}$ b) $12100_{(3)}$
c) $20100_{(3)}$ d) $12000_{(3)}$
e) 21000_3

29. El octavo término de la sucesión :

$$\frac{1}{2} ; \frac{7}{6} ; \frac{17}{12} ; \frac{31}{20} ; .... \text{ es :}$$

a) $\frac{127}{72}$ b) $\frac{129}{56}$ c) $\frac{128}{72}$

d) $\frac{129}{72}$ e) $\frac{127}{56}$

30. Dadas las sucesiones :

$\frac{1}{2} ; \frac{4}{3} ; \frac{9}{4} ; \frac{16}{5} ; ....$ y

$\frac{1}{2} ; \frac{2}{3} ; \frac{3}{4} ; \frac{4}{5} ; ....$

La diferencia de los términos n – ésimos es:

a) $\frac{n(n+1)}{n-1}$ b) $\frac{n}{n+1}$ c) $\frac{n(n-1)}{n+1}$

d) $\frac{n+1}{n(n-1)}$ e) $\frac{n-1}{n(n+1)}$

31. Si : $a = (-1)^n + 1$; n = 1 ; 2 ; ..... y si $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$; n = 2 ; 3 ; .....

Entonces : $S_{20} - S_{21}$ es igual a :

a) – 1 b) 0 c) 20
d) – 21 e) 1

32. ¿Cuántos números de la forma $\overline{(a-6)(b+2)(a+2)}_{(11)}$ existen?

a) 16 b) 27 c) 24
d) 18 e) 22

33. ¿Cuántos números de 4 cifras mayores que 3000, se pueden formar con las cifras?

{0 ; 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7 ; 8 ; 9}

a) 3071 b) 3072 c) 4096
d) 2468 e) 2649

34. ¿Cuántos números capicúas de 5 cifras existen en el sistema octal, tal que la suma de sus cifras sea impar?

a) 224 b) 196 c) 256
d) 280 e) 255

35. ¿Cuántos números capicúas de 5 cifras tienen sólo 3 cifras iguales?

a) 72 b) 76 c) 81
d) 82 e) 162

36. Encuentre la base del sistema de numeración, en el que los números 479, 698 y 907 están en progresión aritmética.

a) 11 b) 12 c) 13
d) 14 e) 15

37. Dadas las sucesiones : A y B

$A_n = \frac{2}{11} ; \frac{4}{15} ; \frac{6}{24} ; \frac{8}{40} ; \frac{10}{65} ; .....$

$B_n = \frac{1}{10} ; \frac{3}{11} ; \frac{5}{15} ; \frac{7}{24} ; \frac{9}{40} ; .....$

Hallar : $B_{2001} - A_{2000}$

Dar como respuesta el numerador de la fracción resultante.

a) 1 b) – 1 c) 41
d) 3 e) 10

38. En la siguiente progresión aritmética, la cantidad de términos que hay desde 87 hasta $\overline{cd0}$ es el triple de las que hay desde $\overline{ab}$ hasta 80.

$\overline{ab}$; ..... ; 80 ; 87 ; ..... ; $\overline{cd0}$

Hallar : a + b + c + d

a) 20 b) 12 c) 17
d) 19 e) 16

39. ¿En cuántos sistemas de numeración 1400 se escribe con tres cifras?

a) 22 b) 23 c) 24
d) 25 e) 26

40. La siguiente progresión aritmética consta de 108 términos, dándose los cuatro términos centrales.

..... ; 442 ; 449 ; 456 ; 463 ; .....

Hallar el segundo término de la progresión.

a) 85 b) 78 c) 71
d) 92 e) 99

41. Hallar "n" sabiendo que en la base 12 existen 6480 numerales de "n" cifras, tales que todas sus cifras son pares.

a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9

42. ¿Cuántos términos tiene la siguiente sucesión?

12 ; 26 ; 42 ; 60 ; ..... ; 2520

a) 45 b) 56 c) 63
d) 35 e) 28

43. La siguiente sucesión :

$\overline{ab}$; $2 \times \overline{ab}$; $3 \times \overline{ab}$; ..... tiene $\overline{ab}$ términos donde la diferencia entre el último y primer término es 2256.

Hallar : a + b

a) 12 b) 11 c) 10
d) 9 e) 8

44. ¿Cuántos números de 3 cifras en la base 12 se escriben también con 3 cifras en las bases 10 y 11?

a) 548 b) 855 c) 857
d) 900 e) 856

45. ¿Cuántos términos tiene la siguiente secuencia?
20 ; 24 ; 23 ; 28 ; 26 ; 32 ; ..... ; 203

a) 124 b) 123 c) 61
d) 121 e) 125

46. El número de enteros de 4 dígitos mayores de 4000 y que terminan en 75 es :

a) 90 b) 60 c) 59
d) 91 e) 61

47. El número de páginas de un libro está comprendido entre 400 y 500.
¿Cuál es este número de páginas, si en total se han empleado 1188 tipos de imprenta para numerarlo?

a) 432 b) 433 c) 450
d) 424 e) 434

48. ¿Cuál es la cifra que ocupa el lugar 373 en la escritura de la siguiente progresión aritmética?
60 ; 68 ; 76 ; .....

a) 2 b) 8 c) 6
d) 4 e) 5

49. De un texto de 600 páginas, se arrancaron todas las hojas que contiene alguna página terminada en 8.
¿Cuántas cifras se mantienen en la numeración de las páginas que quedan?

a) 338 b) 1692 c) 1584
d) 1354 e) 1523

50. Se han enumerado 1130 páginas, de un libro sin utilizar los números que tienen sus cifras iguales.
¿Cuántos dígitos se hubieran empleado si se cuentan los números excluidos?

a) 3489 b) 3349 c) 3689
d) 3549 e) 3416

51. Al numerar las últimas 100 páginas de un libro se han empleado 281 cifras.
¿Cuántas páginas tiene el libro?

a) 90 b) 180 c) 120
d) 150 e) 60

52. ¿Cuántos números de 3 cifras tiene por lo menos 2 cifras iguales?

a) 252 b) 1648 c) 1624
d) 625 e) 180

53. ¿Cuántos numerales de tres cifras tienen sólo dos cifras impares?

a) 300 b) 375 c) 395
d) 350 e) 335

54. ¿En qué sistema de numeración hay 1482 números de la forma : $\overline{a(a+2)(b-2)b}_{(n)}$?

a) 28 b) 33 c) 37
d) 41 e) 45

55. ¿Cuál es el término más cercano a 1000 en la siguiente serie?
28 ; 33 ; 39 ; 42 ; 50 ; 51 ; .....

a) 1002 b) 998 c) 1005
d) 996 e) 999

56. En la progresión aritmética que tiene 41 términos hallar (a + b + n)
$\overline{ab}_{(n)}$; $\overline{a(b+3)}_{(n)}$; $\overline{(2b)2}_{(n)}$; ..... ; $\overline{a(a+b)b}_{(n)}$

a) 10 b) 11 c) 12
d) 14 e) 16

57. ¿Cuántas páginas tiene un libro si en numerar 20 páginas centrales; se han utilizado 51 cifras? ¿Cuál es la última página?

a) 120 b) 123 c) 200
d) 149 e) 219

58. De un libro se arrancaron 120 páginas centrales, observándose que en la numeración de las páginas arrancadas se usaron 285 tipos de imprenta.
¿Cuántos tipos se usan en las hojas que quedan?

a) 393 b) 321 c) 111
d) 195 e) 396

59. Si : a, b y c son cifras en el sistema decimal, ¿Cuántos números de la forma :

$\overline{(a+2)\frac{(b-1)}{2}\left(\frac{c}{3}\right)(a-2)(c+1)}$ existen?

a) 45 b) 225 c) 90
d) 75 e) 275

60. ¿Cuántos números existen de la siguiente forma?

$$\overline{(m+5)(5-m)(n+6)(6-n)\left(\frac{p+3}{2}\right)\left(\frac{p}{3}\right)}$$

a) 220 b) 330 c) 189
d) 270 e) 320

Claves

01.	a
02.	a
03.	a
04.	b
05.	a
06.	a
07.	b
08.	a
09.	b
10.	b
11.	c
12.	c
13.	b
14.	b
15.	a
16.	c
17.	c
18.	b
19.	c
20.	c
21.	b
22.	b
23.	d
24.	d
25.	b
26.	c
27.	c
28.	b
29.	a
30.	c

31.	b
32.	e
33.	a
34.	a
35.	e
36.	a
37.	a
38.	d
39.	e
40.	a
41.	a
42.	a
43.	a
44.	e
45.	b
46.	b
47.	a
48.	d
49.	d
50.	a
51.	b
52.	a
53.	d
54.	d
55.	d
56.	b
57.	c
58.	c
59.	c
60.	c

Capítulo

14

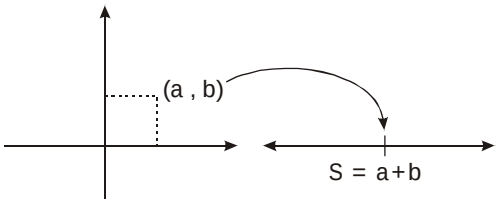
CUATRO OPERACIONES EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

INTRODUCCIÓN

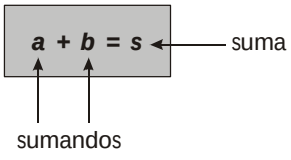
Definimos adición y multilicación de los números enteros no negativos de tal manera que las propiedades de cada uno como operación binaria sean más admisibles.
Una vez establecidas, las llamaremos leyes, porque nos guían en lo que podemos y no podemos hacer en Aritmética, veremos como estas leyes nos permiten ahorrar trabajo en los cálculos, como nos ayudan a encontrar y a entender procedimientos abreviados, así como a dar sentido a muchas de las cosas que antes aprendimos mecánicamente.

ADICIÓN

La adición en Z, que utiliza el operador +, es la operación mediante la cual se asigna a dos números enteros ***a*** y ***b*** denominados términos o sumandos un único número entero ***s***, llamado suma de ***a*** y ***b***.



OPERACION : Adición
OPERADOR : +



AXIOMAS PARA LA ADICIÓN

Clausura : La suma de dos números enteros es también un número entero.

Conmutativa : Al cambiar el orden de los sumandos, la suma no se altera.

Asociativa : La suma de tres o más números enteros no varía al agrupar los sumandos de dos en dos.

Elemento neutro (identidad aditiva) : El único elemento del conjunto de números enteros que sumado con otro número entero ***a*** da como resultado el mismo número ***a*** es 0.

Opuesto o inverso aditivo : Para cada número entero ***a***, existe un único número entero ***– a*** tal que : a + (–a) = 0

Sumas Notables :

i) $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

ii) $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

iii) $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

iv) $1\times2+2\times3+3\times4+...+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

v) $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

vi) $1+a+a^2+a^3+...+a^n=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

Ejercicios :

* Demuestre cada una de las fórmulas anteriores.

* Se conoce que $e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, demuestre que ***e*** se puede obtener sumando los siguientes números.

$$\frac{1}{0!}\ ;\ \frac{1}{1!}\ ;\ \frac{1}{2!}\ ;\ \frac{1}{3!}\ ;\ \frac{1}{4!}\ ;\ \frac{1}{5!}\ ;\ \frac{1}{6!}\ ;\ .....$$

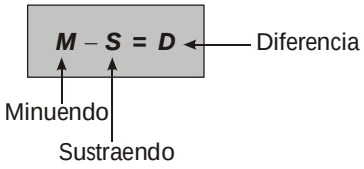
Suma de términos de una progresión aritmética

$$S=\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)\cdot n$$

SUSTRACCIÓN

La sustracción en Z, que utiliza el operador –, es la operación inversa de la adición mediante la cual se asigna a dos números enteros ***M*** y ***S*** denominados minuendo y sustraendo respectivamente un único entero ***D*** denominado diferencia.

OPERACIÓN : Sustracción
OPERADOR : –



PROPIEDAD : La suma de los tres términos de una sustracción es igual al doble del minuendo.

$$M + S + D = 2M$$

PROPIEDAD :

Si a > c y además :

$$\begin{array}{r} \overline{abc}_{(n)} \\ -\ \overline{cba}_{(n)} \\ \hline \overline{xyz}_{(n)} \end{array}$$

Se cumple que : $x + z = y = n - 1$

$a - c = x + 1$

¿Podría demostrar esta propiedad?

COMPLEMENTO ARITMÉTICO

Sea N un numeral de k cifras de la base B

$$CAN_{(B)} = B^k - N_{(B)}$$

Ejemplo :

$$CA(34_5) = 5^2 - 34_5 = 11_5$$

También :

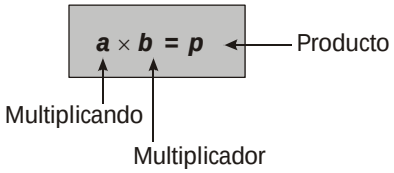
$$CA\,N_{(B)} = \underbrace{100.....0}_{\text{"k" ceros}}{}_{(B)} - N_{(B)}$$

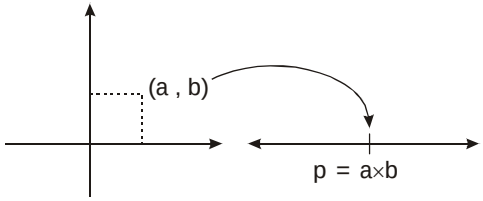
Ejemplo :

$$CA\left[34_{(5)}\right] = 100_{(5)} - 34_{(5)} = 11_{(5)}$$

MULTIPLICACIÓN

La multiplicación en Z, que utiliza el operador $\times$, es la operación mediante la cual se asigna a dos números enteros ***a*** y ***b*** denominados factores un único número entero ***p***, llamado producto de ***a*** y ***b***.





AXIOMAS PARA LA MULTIPLICACIÓN

Clausura : El producto de dos números enteros es también un número entero.

Conmutativa : Al cambiar el orden de los factores el producto no se altera.

Asociativa : El producto de tres o más números enteros no varía al agrupar los factores de dos en dos.

Elemento neutro o identidad : El único elemento del conjunto de números enteros que multiplicado con otro número entero ***a*** da como resultado el mismo número ***a*** es 1.

Cancelación multiplicativa :
Sean a , b , c en Z.
Si : $ac = bc \ \wedge \ c \neq 0 \Rightarrow a = b$

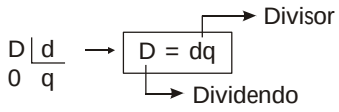
Distributiva : Para a , b y c $\in$ Z , se cumple :

$a(b + c) = ab + ac$

DIVISIÓN ENTERA

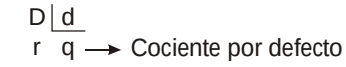
Dados dos números naturales ***a*** y ***b*** $(b \neq 0)$, se define división (Operación inversa a la multiplicación) de ***a*** entre ***b*** y se denota $\frac{a}{b}$ si existe un ***c*** tal que : $a = b \times c$.
Ahora si ***c*** no es entero, debe existir un ***r*** < ***b*** tal que $a = b \cdot c + r$

I. División entera exacta :



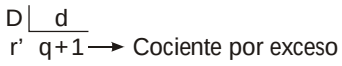
II. División entera inexacta :

i) Por defecto :



$\Rightarrow$ $\boxed{D = dq + r}$

ii) Por exceso



$\Rightarrow$ $\boxed{D = d(q + 1) - r'}$

PROPIEDADES

1. El residuo de una división entera es siempre menor que el divisor.

$$\boxed{\textit{Residuo} < \textit{Divisor}}$$

Como consecuencia :
Residuo máximo = divisor – 1
Residuo mínimo = 1

2. La suma del residuo por defecto y el residuo por exceso de una división entera es igual al divisor.

$$\boxed{r + r' = d}$$

3. Los cocientes por defecto y por exceso de una división son dos números consecutivos.

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. A cierto número par, se le suma los dos números pares que le preceden y los dos números impares que le siguen, obteniéndose en total 968 unidades. El producto de los dígitos del número par de referencia es:

a) 162 b) 63 c) 120
d) 150 e) 36

02. Si la suma de once números enteros consecutivos se halla entre 100 y 116, el número central es :

a) Mayor que 12 b) Impar
c) Primo d) Múltiplo de 11
e) Menor que 19

03. Si : $T_n = 1+3+5+....+(2n-1)$,

hallar el valor de :

$$R = (T_{10}-T_9)+(T_8-T_7)+(T_6-T_5)+(T_4-T_3)+(T_2-T_1)$$

a) 57 b) 53 c) 51
d) 55 e) 59

04. La distancia entre A y B es 10km, un caracol y un galgo parten a la vez de A, el caracol con una velocidad de 1m/min y el galgo con una velocidad de 50m/min. El galgo llega al punto B y regresa en busca del caracol, luego regresa al punto B y vuelve en busca del caracol y así sucesivamente, hasta que ambos llegan a B.
¿Cuál es el espacio total recorrido por el galgo?

a) 50 km b) 200 km c) 100 km
d) 500 km e) 250 km

05. Si n es un número entero positivo, el valor de la suma:

$$3+33+333+...+\underbrace{3.....3}_{\text{n cifras}} \text{ es :}$$

a) $\dfrac{10^n-9n-10}{27}$

b) $\dfrac{10^{n+1}+9n-10}{27}$

c) $\dfrac{10^{n+1}-9n-10}{27}$

d) $\dfrac{10^{n+1}+9n+10}{27}$

e) $\dfrac{10^{n+1}-9n+10}{27}$

06. La suma de los términos de una resta es 15684 y si restamos la diferencia del sustraendo nos da 4788. Hallar la suma de las cifras de la diferencia.

a) 11 b) 13 c) 15
d) 17 e) 19

07. La diferencia de dos números de 3 cifras cada uno es 819. Si se invierte el orden de las cifras del sustraendo, la diferencia es ahora 126.
Hallar el minuendo si las cifras del minuendo y el sustraendo suman 33.

a) 872 b) 891 c) 927
d) 957 e) 982

08. Hallar un numeral de 3 cifras significativas que aumenta en 270 cuando se invierte el orden de sus dos primeras cifras, y que disminuye en $\overline{xy5}$ cuando se invierte las cifras de unidades y centenas.

a) 893 b) 762 c) 851
d) 782 e) 691

09. Hallar : a + b

Sabiendo que : $CA(\overline{ab})+CA(\overline{abab})=3674$

a) 8 b) 9 c) 10
d) 11 e) 7

10. Si el CA de un número de 2 cifras es igual al CA del triple de su cifra de unidades.
Calcular la suma de sus cifras

a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8

11. Si a dos números enteros se les disminuye y aumenta 6 unidades respectivamente, el producto de ellos aumenta en 204 unidades.
¿Cuál es la diferencia de los números?

a) 20 b) 30 c) 40
d) 41 e) 45

12. Si el producto 48×35 , se añaden 8 unidades al primer factor.
Para que el producto no varíe, al otro factor hay que :

a) Restarle 5 b) Sumarle 8
c) Restarle 8 d) Dividirlo entre 8
e) Sumarle 5

13. Si el largo de un paralelepípedo se triplica, el ancho se duplica y la altura se cuadruplica, el volumen original se multiplicaría por :

a) 24 b) 12 c) 30
d) 36 e) 6

14. El producto de "P" y "Q "es igual a "C". Si se agrega "Z" unidades a "P", ¿Cuánto se le debe restar a "Q" para que el producto no varíe?

a) $\frac{ZQ}{(Z+P)}$ b) Z c) $\frac{(P-Z)}{(P+Z)}$

d) $\frac{QZ}{(Z-P)}$ e) $\frac{QZ}{(P-Z)}$

15. Al multiplicar dos números uno de los cuales es mayor que el otro en 10 unidades, un postulante cometió un error disminuyendo en 4 la cifra de las decenas en el producto. Al dividir el producto obtenido por el menor de los factores (para comprobar el resultado) obtuvo en el cociente 39 y en el resto 22.
Hallar el producto correcto.

a) 1151 b) 1191 c) 1231
d) 1271 e) 1311

16. La diferencia de 2 números es 832; su cociente es 17, y el residuo el más grande posible.
Encontrar la suma de los números.

a) 881 b) 993 c) 934
d) 890 e) 930

17. La suma de los 4 términos de una división es 425, si se multiplica por 5 el dividendo y el divisor y se vuelve a resolver la operación, la suma de los términos sería 2073.
Hallar el cociente.

a) 13 b) 12 c) 11
d) 14 e) 17

18. El cociente de una división entera es 11 y el resto es 39. Hallar el dividendo si es menor que 500.
Dar como respuesta el número de soluciones posibles.

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

19. Al dividir un número entre 15, el residuo es 12. ¿Cuál será el residuo si se le divide entre 5?

a) 3 b) 1 c) 4
d) 2 e) 0

20. Al dividir un número entre 5 el residuo es 3 y al dividirlo entre 8 es 6. Si los cocientes se diferencian en 9, ¿qué resto dará al dividir el número por 7?

a) 6 b) 3 c) 1
d) 5 e) 2

21. Una persona divide la cantidad de dinero que tiene en su bolsillo entre 100, resultando un número entero m. Si da m monedas de 10 soles a un mendigo, aún le quedan 2160 soles.
¿Cuánto tenía en el bolsillo?

a) 2000 b) 2160 c) 2400
d) 2450 e) 2500

22. Dos personas tienen \$ 4176 y \$ 960 se ponen a jugar a las cartas a \$ 8 la partida. Al final, la primera que ha ganado todas las partidas tiene el quintuplo de lo que tiene la segunda, ¿Cuántas partidas se han jugado?

a) 10 b) 11 c) 12
d) 13 e) 17

23. Se forman todos los números de tres cifras diferentes que pueden ser escritos con las cifras a, b y c diferentes entre sí. De los números formados se suman tres de ellos, notándose que en dos coincide la cifra de mayor orden. Se suman los números restantes y la diferencia entre ambas sumas es 1584.
Halle : a + b + c, si una de las cifras es la semisuma de las otras dos.

a) 6 b) 9 c) 12
d) 15 e) 18

24. Calcule la suma de todos los números de la forma $\overline{n(2n-1)m\left(\frac{m}{2}\right)a\left(\frac{a}{3}\right)}$.

Dar la suma de cifras.

a) 35 b) 36 c) 38
d) 40 e) 29

25. Calcular la suma de todos los números de la forma :

$$\overline{(a+2)ab\left(\frac{b}{2}\right)}_{(7)}$$

Expresar el resultado en la base 49 y dar como respuesta la suma de sus cifras.

a) 42 b) 43 c) 44
d) 46 e) 48

26. Si : $CA(\overline{abc}) = a \times c$, ¿cuál es la suma de todos los valores de $\overline{abc}$?

a) 7946 b) 8358 c) 8595
d) 8818 e) 9236

27. Al formar todos los numerales posibles de 3 cifras diferentes en base 7 con las cifras a ; b y c; y sumarlos, se cometió el error de hacer la suma en base 9; resultando $\overline{dee4}_{(9)}$.

a) 32 b) 40 c) 45
d) 48 e) 56

28. La suma de las cifras de la diferencia de $\overline{abcd}_{(n)} - \overline{dcba}_{(n)}$ es 24.
¿Cuál es el valor de "n" sabiendo que :

a > d y c < b?

a) 11 b) 12 c) 13
d) 14 e) 15

29. ¿Cuántos números de 3 cifras existen, tal que el complemento aritmético sea igual al producto de sus cifras?

a) 1 b) 2 c) 3
d) 99 e) 990

30. Sabiendo que todas las letras tienen valores distintos y diferentes de cero.
Además se cumple que : $\overline{TRECE} - \overline{OCHO} = \overline{CINCO}$
Hallar la suma de todas las soluciones de :
"T + R + E + C + O + H + I + N"
y dar como respuesta la suma de sus cifras.

a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 4

31. Si en lugar de multiplicar un número N por $\overline{ab}$ se multiplica por $\overline{ba}$, este producto más N unidades es el doble del producto original.
Hallar : (a + b)

a) 8 b) 9 c) 10
d) 12 e) 14

32. Si : $\overline{abcd} \times 99999 = ...6876$

Calcular la suma de cifras de : $\left[\overline{(a+1)b} + \overline{cd}\right]^2$

a) 9 b) 11 c) 12
d) 10 e) 13

33. La cantidad de cifras de los números A, B y C son números consecutivos. Si el producto $A^4B^3C^2$ tiene por lo menos 125 cifras, entonces la cantidad máxima de cifras que puede tener dicho producto es :

a) 130 b) 131 c) 132
d) 133 e) 134

34. El número de cifras que puede tener A del 5 al 9; el de B varía del 7 al 11 y el de C varía del 5 al 10. El máximo número de cifras que puede tener $\left[\frac{A \times B}{C}\right]^3$ es :

a) 36 b) 48 c) 60
d) 64 e) 38

35. El número de cifras de A es el doble de B y el cuádruple de C. Si D tiene 5 cifras,

¿cuántas cifras puede tener : $R = \frac{A^3D}{B^4 \cdot C^4}$?

a) 1 a 5 b) 2 a 8 c) 1 a 11
d) 2 a 13 e) 1 a 12

36. Encontrar un número entero tal que al dividirlo entre 82 deje como resto por defecto el duplo del cociente por exceso y como resto por exceso, el triple del cociente por defecto.

a) 1256 b) 1346 c) 1420
d) 1446 e) 1344

37. Al dividir un número de 3 cifras entre otro de dos cifras, se obtiene 11 de cociente y 25 de residuo. Se les toma el complemento aritmético y se les vuelve a dividir, esta vez se obtiene 7 de cociente y 19 de residuo.
Hallar la suma de las cifras del dividendo y el divisor.

a) 25 b) 26 c) 27
d) 28 e) 29

38. En una división entera el cociente por defecto es 9, los residuos por defecto y por exceso son iguales y la suma del dividendo y divisor es 210.
Hallar el dividendo.

a) 190 b) 150 c) 180
d) 170 e) 160

39. Se divide $\overline{86x43x}$ entre $\overline{b0b}$. Se obtiene $\overline{4b84}$ de cociente y como residuo 67.
Dar (x - b)

a) 6 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

40. El dividendo de una división termina en 305 y el cociente es 526. Si el residuo es máximo, ¿Cuál es la suma de las cifras del divisor si tiene 3 cifras?

a) 15 b) 18 c) 20
d) 21 e) 19

41. Hallar la suma de todos los números de 12 cifras cuya suma de cifras sea 107.
Dé como respuesta la suma de las cifras del resultado.
a) 69 b) 81 c) 92
d) 97 e) 96

42. Sea : $a_n = \left[\frac{2n^4+2n^3+n^2+n}{n(n+1)}\right]$

Calcule : $\sum_{n=1}^{100} a_n$

Dar la suma de sus cifras.

a) 27 b) 26 c) 24
d) 28 e) 29

43. Hallar la media armónica de los siguientes números.
28 ; 70 ; 130 ; 208 ; ..... ("n" términos)
Sabiendo que la suma de estos es 4330.

a) 136 b) 306 c) 160
d) 300 e) 204

44. En una progresión aritmética, los elementos de los lugares j, k y (j + k) son tales, que la suma de los primeros es igual al último menos 1. Si la suma de los primeros es x, hallar la razón de la progresión.

a) $\frac{x}{(j+k-1)}$ b) $\frac{(x+1)}{(j+k-1)}$

c) $\frac{(x+2)}{(j+k-1)}$ d) $\frac{(x+2)}{(j+k)}$

e) $\frac{(x-2)}{(j+k-1)}$

45. Calcular la suma de todos los números enteros de tres cifras de la base "n" que no usan su cifra máxima.

a) $(n-1)^2\times(n-2)\times(n-3)^3$

b) $(n-2)^2\times(n-1)\times n\times(n^2+1)$

c) $\frac{(n-2)\times(n-1)^2}{2}\times(n^3-n-2)$

d) $(n-1)\times(n-2)\times(n-3)^2$

e) $\frac{(n-2)(n-1)^3}{2}$

46. Si : $\overline{abn}+\overline{ban}=\overline{xxx}$
Donde cada cifra es un valor par.
Determine el valor de : a + b, si letras distintas toman valores diferentes.

a) 4 b) 8 c) 6
d) 10 e) 12

47. Sabiendo que :

$\overline{abcd}=\overline{dcba}+\overline{m9n2}$; b = c

Si : $\overline{dsmc}_{(12)}+CA\left(\overline{rmnst}_{(12)}\right)=\overline{6pnb}_{(12)}$

Calcule : A = m + n + r + s + t + p + a + d

a) 45 b) 47 c) 46
d) 48 e) 49

48. ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar "S" en el sistema decimal?

$$S=33_{(33)}+35_{(34)}+37_{(35)}+39_{(36)}+...$$

Dar como respuesta la suma de cifras del resultado.

a) 12 b) 15 c) 18
d) 21 e) 26

49. En una sucesión de 5 números enteros consecutivos y positivos, la suma de los cuadrados de los 3 primeros es igual a la suma de los cuadrados de los 2 últimos, entonces el segundo término de la sucesión es :

a) 8 b) 9 c) 10
d) 11 e) 12

50. Determinar la suma de la razón y el número de términos de la siguiente progresión aritmética :

$$\underbrace{\overline{abc}\,;A\,;B\,;.....\,;C\,;D\,;\overline{def}}_{(2k)\text{ términos}}$$

Sabiendo que : A + B + C + D = 1966
Además la suma de términos es 29490 y f – c = 1

a) 63 b) 65 c) 67
d) 69 e) 71

51. Si : $\overline{abab} \cdot \overline{cd} = \overline{dbcca}$

Y el producto de $\overline{ab}$ por $\overline{cd}$ tiene como suma de cifras 12, además a, b, c, d son cifras significativas (c < d)
Hallar : a – b + c – d

a) – 4 b) 4 c) – 2
d) 2 e) 0

52. Hallar todos los números de 3 cifras tales que multiplicados por su complemento aritmético, el producto termine en 831.
Dar como respuesta la suma de cifras de la suma de los números de 3 cifras.

a) 15 b) 36 c) 27
d) 18 e) 24

53. Usando los dígitos 1 ; 2 ; 3 ; 4 , 5 ; 6 ; 7 ; 8 y 9 (una vez cada uno) forman dos números tales que su producto sea el mayor posible.
¿Cuál es la suma de las cifras de este producto?

a) 36 b) 40 c) 42
d) 39 e) 45

54. Sea N un número de tres cifras tal que el CA(N) tiene 2 cifras, si además : $CA(N) \cdot N = \overline{7bcd5}$
Calcular : b + c + d

a) 13 b) 14 c) 21
d) 18 e) 20

55. Al dividir el número $\overline{7x7}$ entre $\overline{3y}$ se obtiene un cociente de dos cifras iguales y además, $\overline{z7}$ de residuo. Hallar (x + y+ z + w) siendo "w" una de las cifras del cociente y el dividendo lo mayor posible.

a) 15 b) 16 c) 17
d) 18 e) 19

56. Al dividir un número de 3 cifras entre el CA de su CA se obtuvo un residuo por exceso igual a 3, y un residuo por defecto mayor que 30.
Hallar la suma de las cifras del número.

a) 21 b) 16 c) 14
d) 17 e) 18

57. Sean los números a, b y r enteros. Al dividir (a + b) entre b, se obtiene como cociente 3r y como resto r.
Si a > 15r y b es primo menor a 10.
Entonces b es igual a :

a) 1 b) 2 c) 3
d) 5 e) 7

58. Hallar el valor de (c + d) si al dividir $\overline{5cd}$ entre $\overline{ab}$ resulta como cociente $\overline{ba}$ y $\overline{bb}$ como residuo.

a) 9 b) 10 c) 11
d) 12 e) 13

59. Teniendo en cuenta que a = b + c y que al dividir $\overline{aaaa}$ entre $\overline{bbb}$ los residuos sucesivos son $\overline{ccc}$ y a. Hallar la suma de los posibles cocientes.

a) 25 b) 57 c) 59
d) 75 e) 105

60. Al realizar la división entre dos números enteros, se observa que los residuos por defecto y por exceso son $\overline{m2r}$ y $\overline{r2m}$ respectivamente; cuya diferencia es $\overline{ab2}$. Determine el menor valor posible del dividendo, si el cociente por exceso es igual al CA del cociente por defecto aumentado en uno.

a) 6170 b) 5121 c) 4329
d) 5271 e) 6271

Claves

01.	e
02.	e
03.	d
04.	d
05.	c
06.	c
07.	d
08.	e
09.	b
10.	c
11.	c
12.	a
13.	a
14.	a
15.	d
16.	e
17.	a
18.	b
19.	d
20.	a
21.	c
22.	d
23.	d
24.	e
25.	a
26.	c
27.	b
28.	c
29.	a
30.	b

31.	c
32.	e
33.	d
34.	b
35.	d
36.	b
37.	d
38.	a
39.	d
40.	d
41.	e
42.	a
43.	a
44.	d
45.	c
46.	b
47.	b
48.	b
49.	d
50.	d
51.	a
52.	c
53.	e
54.	c
55.	d
56.	b
57.	e
58.	e
59.	d
60.	b

Capítulo

15 TEORÍA DE LA DIVISIBILIDAD

INTRODUCCIÓN

La divisibilidad numérica puede realizarse en los naturales, enteros, racionales ..., es por ello que presenta distintos grados de dificultad ya que muchos conceptos corresponden a una Aritmética Superior, llamada Teoría de Números, la cual se podría decir surge desde Euclides (Algoritmo para MCD); Fermat, Euler, Legendre, Gauss, que con su aporte (Discusiones aritméticas) contribuye al enriquecimiento de dicha teoría; llegando luego otros matemáticos como Dirichlet, Kronecker, Riemann, Dedekind, entre otros que siguen aportando y muestran la importancia que ahora tiene dicha teoría.

Nosotros nos limitaremos a trabajar en el conjunto numérico de los enteros.

Sabemos que la suma, diferencia y producto de dos números enteros es siempre entero, es decir, las operaciones de Adición, Sustracción y Multiplicación son cerradas en Z. Pero el cociente de dos enteros puede ser o no entero, se hace necesario hablar de números divisibles y no divisibles.

NÚMEROS DIVISIBLES: Dos números enteros a y b son divisibles si:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline 0 & c \end{array} \quad c : \text{entero}$$

Por división entera b > 0, entonces $b \in Z^+$ (módulo); de la división se obtiene:

$$a = b \times c$$

En la cual diremos que "a" es múltiplo de "b" y lo denotaremos:

$$\boxed{a \overset{o}{=} b}$$

También se utilizan las notaciones:

$$a = mb$$

$$a \overset{o}{=} b$$

Si a es divisible entre b, se puede decir que "b" divide a "a" esto se denota: b|a

Ejemplo: 91 es divisible entre 13 porque

$$\begin{array}{r|l} 91 & 13 \\ \hline 0 & 7 \end{array}$$

También diremos $91 \overset{o}{=} 13$ porque $91 = 13 \times 7$.

Nota:

$$\overset{o}{12} = 12K \begin{cases} 0 ; 12 ; 24 ; ..... \\ -12 ; -24 ; ..... \end{cases}$$

$12K$: Entero

NÚMEROS NO DIVISIBLES: a y b no son divisibles si la división de a por b es inexacta.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 37 & 7 \\ \hline 2 & 5 \end{array}$$

$$37 = \overset{o}{7} + 2 = \overset{o}{7} - 5$$

$\overset{o}{7}$: 35 ; $\overset{o}{7} - 5$: 42

PRINCIPIOS DE LA DIVISIBILIDAD:

I. OPERACIONES CON MÚLTIPLOS

1. $\overset{o}{n} + \overset{o}{n} = \overset{o}{n}$
2. $\overset{o}{n} - \overset{o}{n} = \overset{o}{n}$
3. $\overset{o}{n} \cdot \overset{o}{n} = \overset{o}{n}$
4. $\overset{o}{n} \cdot K = \begin{cases} \overset{o}{n} \\ \overset{o}{n \cdot K} \end{cases}$ $(k \in Z^+)$
5. $\left(\overset{o}{n}\right)^K = \overset{o}{n}$ $(k \in Z^+)$
6. $\left(\overset{o}{n} + r\right)^K = \overset{o}{n} + r^K$ $(k \in Z^+)$
7. $\left(\overset{o}{n} + r_1\right)\left(\overset{o}{n} + r_2\right) = \overset{o}{n} + r_1 \cdot r_2$

II. Si : $N = \overset{o}{a}$; $N = \overset{o}{b}$; ..... ; $N = \overset{o}{w}$ entonces:

$$N = \overset{o}{\overline{MCM(a, b, ... , w)}}$$

III. Sea $A \cdot B = \overset{o}{n}$; si A y n no tienen divisores comunes, excepto la unidad (primos entre sí) entonces:

$$\boxed{B \overset{o}{=} n}$$

ECUACIÓN DIOFÁNTICA LINEAL : Es una ecuación algebráica cuyas variables son enteras:

$$\boxed{Ax \pm By = C}$$

Ejemplo 1:
Resolver en N

$$87x + 111y = 3903$$

Ejemplo 2:
¿Cuántos números naturales no se pueden obtener como 8x + 11y, donde x e y son dos números enteros no negativos?
Rpta:

RESTOS POTENCIALES: Son los diversos residuos que se obtienen al dividir las diferentes potencias de una misma base entre un cierto número llamado módulo.

Ejemplo: Calcule los restos potenciales de la base 10, respecto al módulo 7.

$$10^n \overset{o}{=} 7 + r \quad n \in N$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8....
r	1	3	2	6	4	5	1	3	2....

Observamos que: $10^6 \overset{o}{=} 7 + 1$ y que en total hay 6 residuos diferentes: {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5} a dicha cantidad se le llama gaussiano.

$$10^{\overset{o}{\text{gaussiano}}} \overset{o}{=} 7 + 1$$

Aplicación 1: ¿Cuál es el resto de dividir 10^{375} entre 7?

Aplicación 2: ¿Cuál es el resto de dividir 6^{307} entre 8?

Aplicación 3: ¿Cuál es el resto de dividir $76^{\overline{\text{TRILCE 2005}}}$ entre 14?

CRITERIOS DE LA DIVISIBILIDAD:
Son ciertas reglas prácticas que aplicados a las cifras de un numeral permiten determinar su divisibilidad respecto a un cierto número.

PRINCIPALES CRITERIOS:

$$\overline{abcd} \overset{o}{=} 2 \Leftrightarrow d \overset{o}{=} 2$$
$$\overline{abcd} \overset{o}{=} 4 \Leftrightarrow \overline{cd} \overset{o}{=} 4$$
$$\overline{abcd} \overset{o}{=} 8 \Leftrightarrow \overline{bcd} \overset{o}{=} 8$$

$$\overline{abcd} \overset{o}{=} 3 \Leftrightarrow a+b+c+d \overset{o}{=} 3$$
$$\overline{abcd} \overset{o}{=} 9 \Leftrightarrow a+b+c+d \overset{o}{=} 9$$

$$\overline{abcde} \overset{o}{=} 5 \Leftrightarrow e = 5 \text{ ó } 0$$
$$\overline{abcde} \overset{o}{=} 25 \Leftrightarrow \overline{de} \overset{o}{=} 25$$
$$\overline{abcde} \overset{o}{=} 125 \Leftrightarrow \overline{cde} \overset{o}{=} 125$$

$$\overline{abcde} \overset{o}{=} 11 \Leftrightarrow a-b+c-d+e$$

$$\overline{\underbrace{abcdef}_{-\ +}} \overset{o}{=} 7 \Leftrightarrow -2a-3b-c+2d+3e+f \overset{o}{=} 7$$

$$\overline{\underbrace{abcdef}_{+\ -\ +}} \overset{o}{=} 13 \Leftrightarrow 4a+3b-c-4d-3e+f \overset{o}{=} 13$$

$$\overline{a\ b\ c\ d\ e} \overset{o}{=} 33 \Leftrightarrow a+10b+c+10d+e \overset{o}{=} 33$$
$$\overline{a\ b\ c\ d\ e} \overset{o}{=} 99 \Leftrightarrow a+10b+c+10d+e \overset{o}{=} 99$$

COMPLEMENTOS

DIVISIBILIDAD EN OTRA BASE:

$\overline{abcde}_{(n)} \overset{o}{=} k$ ***;*** por restos potenciales:

Base n : n^0 n^1 n^2 n^3 n^4 .....
Módulo k : 1 r_1 r_2 r_3 r_4 .....
Entonces se cumple:

$$r_4a + r_3b + r_2c + r_1d + e \overset{o}{=} k$$

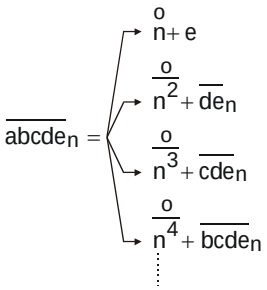
DIVISIBILIDAD POR (n + 1) EN BASE n:

$$\overline{abcd}_{(n)} \overset{o}{=} (n+1) \Leftrightarrow -a+b-c+d \overset{o}{=} (n+1)$$

DIVISIBILIDAD POR (n – 1) EN BASE n:

$$\overline{abcd}_{(n)} \overset{o}{=} (n-1) \Leftrightarrow a+b+c+d \overset{o}{=} (n-1)$$

PROPIEDAD:



CONGRUENCIA:

Dos números a y b son congruentes respecto al módulo m si al dividir a y b entre m el resto es el mismo.

EJEMPLO:

17 y 32 son congruentes respecto al módulo 5 porque:

$$17 = \overset{o}{5} + 2 \;\; ; \;\; 32 = \overset{o}{5} + 2$$

NOTACIÓN

$$a \equiv b(m) \text{ o } a \equiv b \,(\text{mod } m)$$

Se verifica : $a - b = \overset{o}{m}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. El número de enteros divisibles por 3 y por 7 que hay entre 100 y 250 es:

a) 8 b) 9 c) 11
d) 6 e) 7

02. ¿Cuántos números de 3 cifras, que sean impares y múltiplos de 5 existen en el sistema decimal?

a) 90 b) 180 c) 200
d) 450 e) 900

03. Si al cuadrado de un número de dos dígitos se le resta el cuadrado del número formado por los dos dígitos en orden invertido, el resultado es divisible por:

a) 7.
b) El producto de los dígitos.
c) La suma de los cuadrados de los dígitos.
d) La diferencia de los dígitos.
e) 13.

04. Un número de 6 cifras es constituido repitiendo otro número de 3 cifras. Entonces podemos afirmar que dicho número de 6 cifras es siempre divisible entre los números:

a) 7 , 9 , 17 b) 11 , 13 , 17 c) 3 , 7 , 19
d) 7 , 11 , 17 e) 7 , 11 , 13

05. En una canasta hay entre 50 y 60 huevos. Si los cuento tomándolos de tres en tres me sobran dos; pero si los cuento tomándolos de cinco en cinco me sobran 4. ¿Cuántos huevos hay en la canasta?

a) 55 b) 59 c) 57
d) 56 e) 58

06. En una función de cine, entre adultos, jóvenes y niños suman 815 personas. Los $\frac{5}{11}$ de los jóvenes son mujeres. La cantidad de adultos es igual a la séptima parte de la cantidad de jóvenes. Sabemos que la cantidad de niños es menor que la de adultos y que la tercera parte de los jóvenes llegaron tarde.
Encontrar la cantidad de niños.

a) 18 b) 22 c) 23
d) 25 e) 28

07. A un evento deportivo asistieron a lo más 200 personas. Si se observa que la quinta parte de los señores comen helado, las señoras representan la octava parte de los señores y los niños representan la tercera parte de las señoras. Halle cuántos niños asistieron.

a) 15 b) 10 c) 5
d) 120 e) 20

08. La suma de todos los números pares menores que 100 y no múltiplos de 5 es:

a) 2000 b) 2050 c) 1950
d) 1988 e) 1590

09. ¿Cuál es el resto de dividir $199^2 + 2001^2 + 2003^2$ entre 8?

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 6

10. ¿Cuál es la suma de las cifras que deben sustituir al 2 y 3 del número 52103 para que sea divisible por 72?

a) 12 b) 13 c) 14
d) 15 e) 16

11. Un número de tres cifras es divisible por 8, si se invierte el orden de sus cifras es divisible por 5; además si se suprime la cifra de unidades, las cifras restantes forman un múltiplo de 17.
La suma de las cifras de dicho número es:

a) 7 b) 8 c) 9
d) 10 e) 11

12. Se tiene cierto número N, del cual se sabe que al dividirlo entre 3, 4, 5, 6 y 9 deja residuo 1. Pero al dividirlo entre 7 deja residuo 0.
Hallar la suma de cifras del menor número que cumple con tal condición.

a) 10 b) 11 c) 12
d) 13 e) 14

13. A un número de 4 dígitos donde sus 3 últimas cifras son iguales se le ha restado otro, que se obtuvo al invertir el orden de las cifras del primero.
Si la diferencia es múltiplo de 7, hallar la diferencia.

a) 777 b) 1554 c) 2331
d) 4662 e) 6993

14. La cifra de las unidades del número $3^{401} - 1$ es:

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

15. Determinar la suma de todos los números de cinco cifras de la forma $\overline{27a4b}$ de modo que sean divisibles por 4 y 9.

a) 81332 b) 82462 c) 82332
d) 82233 e) 82234

16. Si: n es un número entero, entonces $n^2(n^2-1)$ siempre es divisible por:

a) $12-n$ b) 48 c) 12 y 24
d) 24 e) 12

17. En el sistema de base 7 la cifra de las unidades $(1459)^{55}$ es:

a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

18. A un número de tres cifras múltiplo de 6, se le agrega uno y se convierte en múltiplo de 7 y si se le agrega una unidad más, se convierte en múltiplo de 8.
Hallar la suma de sus cifras.

a) 11 b) 10 c) 6
d) 16 e) 17

19. Una compañía de aviación compra 13 avionetas por 16,5 millones de nuevos soles. Las avionetas que compra son del tipo A a un precio de 1,1 millones, del tipo B a un precio de 1,3 millones y del tipo C a 1,8 millones.
¿Cuántas avionetas compró de cada tipo?

a) 2 ; 11; 0 b) 3 ; 7 ; 3 c) 5 ; 6 ; 2
d) 7 ; 4 ; 2 e) 8 ; 4 ; 1

20. Se convierte al sistema de numeración de base 7 el número 2^{1019}.
¿Cuál será su cifra de unidades en dicha base?

a) 2 b) 4 c) 5
d) 6 e) 8

21. Si : N = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + k,
Calcular el menor valor que puede tener "N", si $k=\overset{o}{7}$ y $k+1=\overset{o}{15}$.
Dar como respuesta la suma de cifras de "N".

a) 16 b) 9 c) 10
d) 12 e) 18

22. Decir cuál de los enunciados es falso:

a) p es par $\leftrightarrow$ p es múltiplo de 2.
b) Ninguna.
c) p termina en cero o en cinco $\leftrightarrow$ p es múltiplo de 5.
d) p y q pares $\leftrightarrow$ p + q es par.
e) p es impar $\leftrightarrow$ p no es múltiplo de 2.

23. ¿Cuántos números de 3 cifras, que son divisibles entre 5, dan como residuo 5 al ser divididos entre 17?

a) 7 b) 8 c) 9
d) 10 e) 11

24. ¿Cuántos números de la forma $\overline{abba}_{(8)}$ son múltiplos de 17?

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) Más de 4

25. ¿Cuántos números de la forma $\overline{abcab}$ son divisibles entre 385?

a) 4 b) 36 c) 18
d) 9 e) 27

26. La suma de los números naturales del 1 al 5N origina un $\overset{o}{35}$. Si N tiene 3 cifras, ¿cuál es la suma de cifras del menor valor que puede tomar dicha suma?

a) 10 b) 11 c) 12
d) 18 e) 15

27. Hallar el resto de dividir $3^{42^{46}}$ entre 11.

a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

28. El número de pisos de un edificio está comprendido entre 100 y 130. A dicho número, le falta una unidad para ser múltiplo de 3; le falta 6 unidades para ser múltiplo de 8 y le sobran 2 para ser múltiplo de 10.
¿Cuál es el número de pisos?

a) 112 b) 122 c) 121
d) 107 e) 111

29. Al dividir 15! entre $\overline{abc}$, se obtiene 75 de residuo y al dividir 16! entre $\overline{abc}$ da 23 de residuo.
Hallar el residuo de dividir 19! entre $\overline{abc}$.

a) 73 b) 28 c) 42
d) 75 e) 79

30. Hallar el resto de dividir $36^{37^{38}}$ entre 11.

a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 8

31. Si el numeral $\overline{2a22a222a2222a...a}$ tiene 90 cifras y es divisible por 9, hallar el mayor valor de "a".

a) 7 b) 6 c) 9
d) 4 e) 8

32. Un número posee 26 cifras, la primera de izquierda a derecha es 8 y las restantes son 6, ¿Cuál será la cifra de las unidades del número equivalente a él, en base 7?

a) 6 b) 5 c) 4
d) 3 e) 2

33. Si : $N = \overline{abcd}$

Tal que : $\overline{abcd} = \overset{o}{11}$; y $a+b+c+d = d^2$

Hallar la suma de cifras de N.

a) 10 b) 12 c) 14
d) 16 e) 18

34. Encontrar el mayor número de 4 cifras que al ser dividido entre 18; 42 y 56 deja en cada caso el máximo residuo posible.

a) 8675 b) 9876 c) 9575
d) 9972 e) 9996

35. Respecto a cuántos módulos, menores que 400, son incongruentes 1031 y 534?

a) 397 b) 393 c) 396
d) 390 e) 394

36. Un alumno recuerda que $\overline{53a33b5}$ es el número telefónico de su amiga. También se acuerda que $\overline{3a33b}$ es múltiplo de 7 y de 11 y no contiene ceros. Determine la suma de los dígitos de dicho número telefónico.

a) 29 b) 28 c) 27
d) 26 e) 25

37. Si: $489^{\overline{mnm}} = \overset{o}{\overline{11}} + 4$

Indique la suma de todos los valores que toma $\overline{mnm}$

a) 1980 b) 3960 c) 4500
d) 10160 e) 12010

38. ¿Cuál es el menor número de tres cifras que es igual a 27 veces la suma de sus cifras?
Dar como respuesta la cifra de las decenas.

a) 1 b) 2 c) 4
d) 6 e) 8

39. Para cada número natural "n", definimos:

$$U_n = 16n^2 + 8n + 6(1-5^n) + 128$$

Entonces el residuo de dividir U_n entre 64 es:
Sugerencia: Considerar la expresión:

$$U_{n+1} - 5U_n$$

a) 1 b) 4 c) 0
d) 2 e) n

40. Sabiendo que $n \in N$ y además $x \neq \overset{o}{5}$.
Calcular el residuo de dividir E entre 5, si :

$$E = x^{100n} + 4x^{200n} + 9x^{300n} + ...$$
$$..... + 144x^{1200n}$$

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

41. ¿Para qué valores de n, la expresión $n^2 + n - 12$ es $\overset{o}{\pi}$ (múltiplo de π)?

a) $n = \pi - 3$ b) $n = \pi + 4$
c) $n = \pi - 4$ o $n = \pi + 3$
d) $n = \pi + 2$ e) $n = \pi - 2$

42. Dado un conjunto de números enteros positivos no necesariamente distintos, se realizan las siguientes 10 operaciones: Se descarta el primero y se suman los 9 restantes, se descarta el segundo y se suman los 9 restantes, y se sigue así hasta descartar el último y sumar los nueve restantes, de esta manera se obtienen sólo nueve resultados distintos, que son: 86; 87; 88; 89; 90; 91; 92; 93; 96. Hallar los diez números iniciales. Dar uno de estos.

a) 0 b) 1 c) 4
d) 18 e) 3

43. Si el número $31^{\overline{mnpq3}}$ se expresa en base 5, ¿Cuál es la suma de sus 2 últimas cifras?

a) 6 b) 4 c) 8
d) 5 e) 3

44. Se sabe: $\overline{pmn}^{\overline{nm}} = \overset{o}{5} + 3$
¿Cuántos valores toma $\overline{pnm}$?

a) 81 b) 90 c) 63
d) 99 e) 72

45. Si los números n y p no son múltiplos de 5, entonces la expresión siguiente:
$32p^{32n} + 28p^{28n} + 24p^{24n} + ... + 4p^{4n}$ es:

a) $\overset{o}{5}$ b) $\overset{o}{5}+1$ c) $\overset{o}{5}+2$
d) $\overset{o}{5}-2$ e) $\overset{o}{5}-1$

46. Si: $21 \times \overline{mnm}^{\overline{mnm}} = \overset{o}{4} + 1$
¿Cuántos valores puede asumir $\overline{mnm}$ que sean múltiplos de 3 pero no de 9?

a) 3 b) 5 c) 6
d) 22 e) 7

47. Hallar el mayor número de 3 cifras $\overline{abc}$, tal que se cumpla que $\overline{abc}^{\overline{abc}} = 9 + 7$

Y dar como respuesta la suma de sus cifras.

a) 15 b) 14 c) 13
d) 12 e) 16

48. Un número $M = 23 + 8$ se divide entre $N = 23 + 6$ y se obtiene un cociente de tres cifras $C = 13 + 6$ y un resto R = 5.
¿Cuántos valores posibles puede tomar el cociente?

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

49. Un cierto número es una potencia de 2 y acaba en 68. Hallar la suma de cifras de los valores que puede tomar la cifra de las decenas del exponente.

a) 10 b) 15 c) 20
d) 25 e) 30

50. Si: $\overline{xy} = 4$; $\overline{yx6}^{\overline{xy}} + \overline{x5}^{\overline{yx}} = 10 + y - x$,
hallar el máximo valor de: x + y

a) 3 b) 4 c) 5
d) 7 e) 11

51. Calcule el resto de N entre 7 donde:
$X = 5 \times \overline{abc}^{1} + 5^2 \times \overline{abc}^{2} + 5^3 \times \overline{abc}^{3} + ...$
$..... + 5^{1031} \times \overline{abc}^{1031}$
Además, se sabe que $\overline{abc}$ no es divisible por 7.

a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 0

52. Si: $7208^{2064} = \overline{...xyzw}_{(7)}$
Hallar: x + y + z + w

a) 17 b) 16 c) 13
d) 14 e) 15

53. Si: $\overline{abbaaa}$ es divisible por 72.
Calcular el residuo al dividir.

$(\underbrace{\overline{ababab.....}}_{\overline{ddd}\,42\text{ cifras}})^{\overline{UNI98}}$ entre 28

a) 0 b) 8 c) 7
d) 9 e) 27

54. ¿Cuál es el conjunto de todos los números n tales que la expresión $f(n) = 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ es divisible entre 17?

a) $\{n \in Z / n \geq 5\}$
b) $\{n \in Z / n \leq 17\}$
c) ϕ
d) $\{n \in Z / n \geq 0\}$
e) {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , ..., 16 , 17}

55. Se sabe que el numeral $\overline{mnpq} = 5$, también $\overline{qm} = 7$ y $\overline{nmnqpp}$ es múltiplo de "k", donde "k" es la cantidad de números de 3 cifras que son 8, tales que al sumarles 4 se convierten en 12.
Dar como respuesta la suma de los valores que toma "n".

a) 17 b) 13 c) 10
d) 12 e) 16

56. De los números de 4 cifras que son múltiplos de 9, ¿cuántos hay que tienen todas sus cifras significativas y distintas entre sí?

a) 216 b) 108 c) 226
d) 332 e) 118

57. Hallar el numeral de 5 cifras que sea igual a 45 veces el producto de sus cifras.
Dar la suma de sus cifras.

a) 18 b) 27 c) 36
d) 45 e) 9

58. ¿Cuántos números enteros de 4 cifras $\overline{mcdu}$ existen, tal que al añadir una unidad al producto formado por sus dos grupos de cifras consecutivas $\overline{mc}$ y $\overline{du}$, se obtenga el número invertido, es decir:
$\overline{nc} \cdot \overline{du} + 1 = \overline{udcm}$?

a) 6 b) 15 c) 12
d) 23 e) 24

59. Hallar la suma de todos los números no negativos que no se pueden obtener con la expresión : E = 6a + 5b, donde a y b son números enteros no negativos.

a) 70 b) 80 c) 60
d) 50 e) 40

60. Hallar la suma de cifras del residuo que se obtiene al dividir $2 \times (278!)$ entre 281.

a) 1 b) 4 c) 6
d) 10 e) 12

Claves

01.	e
02.	a
03.	d
04.	e
05.	b
06.	c
07.	c
08.	a
09.	c
10.	a
11.	b
12.	a
13.	e
14.	b
15.	c
16.	e
17.	b
18.	c
19.	d
20.	b
21.	b
22.	d
23.	c
24.	c
25.	c
26.	c
27.	c
28.	b
29.	e
30.	c

31.	e
32.	e
33.	d
34.	c
35.	c
36.	a
37.	e
38.	c
39.	c
40.	a
41.	c
42.	c
43.	b
44.	b
45.	e
46.	c
47.	a
48.	d
49.	d
50.	e
51.	a
52.	c
53.	a
54.	d
55.	d
56.	d
57.	b
58.	e
59.	b
60.	d

Capítulo

16 NÚMEROS PRIMOS

INTRODUCCIÓN

Abogado de profesión, matemático aficionado, nació en la ciudad de Beaumont-de-Lomange el 17 de agosto del 1601.

Pierre Fermat hizo importantes aportes a la matemática, como por ejemplo en Geometría Analítica. El cálculo de probabilidades, el cálculo infinitesimal y la aritmética.

Sus investigaciones se conocen, fundamentalmente, debido al intercambio de notas que mantuvo con matemáticos de la época, tales como Blaise Pascal (1623-1662); René Descartes (1596-1650); M. Mersenne entre otros.

Cabe destacar una carta dirigida a Pierre de Carcavi (1600-1684) en la que expone sumariamente lo que el consideraba importante, como por ejemplo el método del "descenso infinito".

En 1679, su hijo mayor Clement-Samuel recopiló y publicó sus obras y cartas de su padre.

En la copia de Bachet del libro de Diofanto, en la parte del mismo donde se plantea el problema de hallar cuadrados que son sumas de dos cuadrados, Fermat escribió.

> *"Cubum autem in duos cubos, aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos, et generaliter nullam in infinitud ultra quadratum potestatem in duos eje dem nominis fase est dividere: cufus rei demostrationem mirabilem sane detexi. Han marginis non carpet".*

Que traducido señala:

> *"Por otra parte, es imposible para un cubo ser suma de dos cubos, para una cuarta potencia ser suma de dos cuartas potencias o en general para un número que es potencia mayor que dos, ser suma de dos números que son de esta misma potencia. He descubierto una demostración maravillosa de esta afirmación imposible de escribir en este estrecho margen".*

Simbólicamente, esa proposición, hoy llamada EL ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT establece que si "n" es un número natural mayor que dos, no existen números naturales x, y, z que satisfacen la ecuación :

$$x^n + y^n = z^n$$

Pierre Fermat falleció en la ciudad de Castres el 12 de enero de 1665.

CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS

Al considerar los enteros positivos, observamos que la unidad es el único número que tiene un solo divisor, los demás números tienen dos o más divisores; según esto daremos las siguientes definiciones:

1. ***NÚMERO PRIMO:*** Es aquel número entero positivo que posee sólo dos divisores: la unidad y el mismo número.

   Ejemplo:
   3 es un número primo debido a que tiene sólo dos divisores: 1 y 3.
   Son números primos: 2; 3; 5; 7; 11; 13; .....

2. ***NÚMERO COMPUESTO:*** Es aquel número entero positivo que tiene más de dos divisores.

   Ejemplo:
   6 es un número compuesto debido a que tiene más de dos divisores : 1 , 2 , 3 y 6.

3. ***NÚMERO SIMPLE:*** Es aquel número entero positivo que no tiene más de dos divisores.

4. ***NÚMEROS PRIMOS ENTRE SÍ (PESI):*** Son aquellos que tienen como único divisor común a la unidad. A dichos números, también se les llama primos relativos o coprimos.

5. ***DIVISOR PROPIO:*** Son todos los divisores de N, menores que N.

   Ejemplo: Los divisores propios de 12 son: 1, 2, 3, 4 y 6.

PROPIEDADES

* La sucesión de números primos es infinita.
* El único número primo par es 2.
* Si N es un número primo mayor que 3, entonces N es $\overset{o}{6} \pm 1$
* Varios números consecutivos son PESI.
* Si un número primo absoluto no está contenido en un número compuesto, ambos son PESI.

Ejercicios:

1. Demuestre que la sucesión de números primos es infinita.
2. Demuestre que el único número primo par es dos.
3. Demuestre que si N es un número primo mayor que 3, entonces N es $\overset{o}{6}+1$ ó $\overset{o}{6}-1$
4. La suma de dos números primos es 199, calcule el mayor.
5. Averigüe qué es un número perfecto, un número abundante, número defectuoso y números amigos.

Teorema Fundamental de la Aritmética:
Todo número entero positivo se puede descomponer como el producto de potencias de sus factores primos, esta descomposición es única y se conoce como descomposición canónica.

Ejemplo :
Descomponer canónicamente el número: 360.

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 360 = \underbrace{2\times2\times2}\times\underbrace{3\times3}\times5 \\ 360 = \quad 2^3 \quad \times \quad 3^2 \quad \times 5^1 \end{array}$$

Ejercicio:
Demuestre que la descomposición canónica de un número es única.

ESTUDIO DE LOS DIVISORES DE UN NÚMERO

a) Tabla de Divisores:
Ejemplo: Confecciona la tabla de divisores de 120.

$$120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$$

	2^0	2^1	2^2	2^3 ← Divisores de 2^3
1	1	2	4	8
3	3	6	12	24
5	5	10	20	40
	15	30	60	120

Los divisores de 120 son :
1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120.
$\Rightarrow$ 120 tiene 16 divisores.

* ***Cantidad de Divisores de un Número:***
Sea $N = a^m \cdot b^n \cdot c^p$ la descomposición canónica de N; podemos calcular la cantidad de divisores de N sin necesidad de hacer la tabla de divisores, utilizando la siguiente fórmula :

$$CD(N) = (m + 1)(n + 1)(p + 1)$$

Ejemplo:
Calcule la cantidad de divisores de 120.

$$120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$$
$$\Rightarrow CD(120) = \underbrace{(3+1)}_{4}\underbrace{(1+1)}_{2}\underbrace{(1+1)}_{2} = 16$$

Obs. También se cumple:

$$CD(N) = CD(primos) + CD(compuestos) + 1$$

* ***Suma de los Divisores de un Número:***

$$SD(N) = \left(\frac{a^{m+1}-1}{a-1}\right)\left(\frac{b^{n+1}-1}{b-1}\right)\left(\frac{c^{p+1}-1}{c-1}\right)$$

Ejemplo:
Calcule la suma de los divisores de 120.

$$120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$$
$$SD(120) = \left(\frac{2^{3+1}-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^{1+1}-1}{3-1}\right)\left(\frac{5^{1+1}-1}{5-1}\right) = 360$$

* ***Producto de los Divisores de un Número:***

$$PD(N) = \sqrt{N^{CD(N)}}$$

Ejemplo:
Calcule el producto de los divisores de 120 como CD(120) = 16.

$$\Rightarrow PD(120) = \sqrt{120^{16}} = 120^8$$

* ***Suma de las inversas de los divisores de N:***

$$SID(N) = \frac{SD(N)}{N}$$

Ejemplo:

Calcule la suma de las inversas de los divisores de 120.

$$SID(120) = \frac{SD(120)}{120} = \frac{360}{120} = 3$$

INDICADOR DE UN NÚMERO O FUNCIÓN EULER $\phi_{(N)}$

La cantidad de números menores o iguales que N y PESI con N se puede calcular utilizando la expresión :

$$\phi_{(N)} = a^{m-1}(a-1)b^{n-1}(b-1)c^{p-1}(c-1)$$

que también se puede escribir :

$$\phi_{(N)} = a^m b^n c^p \left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)$$

Ejemplo:

¿Cuántos números menores o iguales que 12 son primos relativos con 12?

$$\underbrace{1, 5, 7, 11}_{4 \text{ números}}$$

Esta cantidad se puede calcular usando la función de Euler.

Como: $12 = 2^2 \times 3^1$

$$\phi_{(12)} = \underbrace{2^{2-1}}_{2}\ \underbrace{(2-1)}_{1}\ \underbrace{3^{1-1}}_{1}\ \underbrace{(3-1)}_{2} = 4$$

o también:

$$\phi_{(12)} = \underbrace{2^2}_{4}\ \underbrace{\left(1-\frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{2}}\ \underbrace{3^1}_{3}\ \underbrace{\left(1-\frac{1}{3}\right)}_{\frac{2}{3}} = 4$$

Ejercicios:

1. ¿Cuántas fracciones propias e irreductibles de denominador 120 existen?
   Rpta: 32

2. Demuestre una fórmula para sumar todos los números menores o iguales que N que son primos relativos con N.
3. Hallar la suma de todas las fracciones propias e irreductibles cuyo denominador es 600.
   Rpta: 80

TEOREMAS ADICIONALES

TEOREMA DE WILSON: Si p es un número primo.

$$(p-1)! \overset{o}{=} p-1$$

Ejemplo:

$$(5-1)! \overset{o}{=} 5-1$$

TEOREMA DE EULER: Si a y b son PESI:

$$a^{\phi(b)} \overset{o}{=} b+1$$

Ejemplo:

Sea a = 3 y b = 8

Se cumple:

$$\underbrace{3^{\phi(8)}}_{3^4} \overset{o}{=} 8+1$$
$$3^4 \overset{o}{=} 8+1$$

TEOREMA DE FERMAT: Si a y p son PESI y p es un número primo.

$$a^{p-1} \overset{o}{=} p+1$$

Ejemplo: Sea a = 4 y p = 3 se cumple:

$$\underbrace{4^{3-1}}_{4^2} \overset{o}{=} 3+1$$
$$4^2 \overset{o}{=} 3+1$$

Ejercicios:

1. Demuestre el Teorema de Fermat.
2. Demuestre el Teorema de Wilson.
3. Demuestre que: si p es primo

   $(a+b+c+.....)^p \overset{o}{=} p + a^p + b^p + c^p + ...$

   Donde: a , b , c , ... son números enteros positivos.

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. ¿Cuántos divisores tiene 1260?

a) 16 b) 32 c) 40
d) 30 e) 36

02. La suma de los factores primos de 19635 es:

a) 15 b) 29 c) 43
d) 28 e) 31

03. ¿Cuántos divisores impares tiene 98000?

a) 10 b) 12 c) 16
d) 8 e) 15

04. ¿Cuántos divisores de 240 no son múltiplos de 6?

a) 4 b) 8 c) 15
d) 12 e) 16

05. ¿Cuántos divisores tiene el número de divisores del cuadrado de 1386000?

a) 24 b) 20 c) 18
d) 16 e) 14

06. ¿Cuántos divisores primos tiene el número $\overline{ababab}$, si $\overline{ab}$ es un número primo mayor que 37?

a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 7

07. Si : $6^a \times 18^b$ tiene 77 divisores, hallar el valor de "a.b".

a) 8 b) 6 c) 10
d) 12 e) 15

08. Encuentre un número sabiendo que es de la forma 16×24^k y además tiene 84 divisores más que el número 1440.
Dar el valor de k.

a) 6 b) 8 c) 10
d) 9 e) 5

09. Diga Ud., ¿Cuántos de los siguientes números son primos absolutos en base 7?

$$13_{(7)} ; 31_{(7)} ; 61_{(7)} ; 25_{(7)}$$

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

10. El número de divisores no primos que tiene 160083 es:

a) 36 b) 33 c) 32
d) 51 e) 47

11. Hallar la suma de los divisores de 4680 que sean primos con 351.

a) 72 b) 2340 c) 89
d) 90 e) 83

12. Hallar el valor de n para que el número de divisores de $N = 30^n$ sea el doble del número de divisores de $M = 15 \cdot 18^n$.

a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9

13. Calcula "n" si: $K = 12^n \times 28$, tiene 152 divisores compuestos.

a) 5 b) 4 c) 3
d) 2 e) 1

14. Calcular la cantidad de divisores de 14!, que sean impares mayores que 10.

a) 216 b) 215 c) 214
d) 211 e) 212

15. Hallar el menor múltiplo de 6, sabiendo que tiene 15 divisores menos que 1800.
Dar como respuesta la suma de sus cifras.

a) 15 b) 18 c) 19
d) 21 e) 20

16. Si N tiene 21 divisores y es de 3 cifras, entonces la suma de sus cifras es:

a) 12 b) 14 c) 15
d) 16 e) 18

17. ¿Cuál es el menor número por el que se debe multiplicar a 648 para obtener 40 divisores?

a) 5 b) 7 c) 8
d) 16 e) 12

18. Cuántos divisores tendrá el número N, si: $N = A \times B$ donde:

$A = 12 \times 12^2 \times 12^3 \times .... \times 12^n$

$B = 18 \times 18^2 \times 18^3 \times .... \times 18^n$

a) $3n^2 + 3n$ b) $(3n^2 + 3n)^2$

c) $\frac{8n^2 + 3n}{2}$ d) $\frac{(3n^2 + 3n)^2}{2}$

e) $\frac{(3n^2 + 3n + 2)^2}{4}$

19. Si: $A = 15(18)^n$; $B = 30(27)^{2n-1}$ y la suma de la cantidad de los divisores de A y B es 132.

Hallar: $(n + 2)^2$

a) 49 b) 36 c) 16
d) 25 e) 64

20. Hallar la suma de las cifras de un número entero N, sabiendo que admite sólo 2 divisores primos, que el número de sus divisores simples y compuestos es 6 y la suma de ellos es 28.

a) 9 b) 5 c) 7
d) 3 e) 6

21. Los divisores primos de un entero positivo A son 2 y 3, el número de divisores de su raíz cuadrada es 12 y el número de divisores de su cuadrado es 117. ¿Cuántos de tales A existen?

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 0

22. El número $\overline{ababab}$ es múltiplo de 169 y el es mayor posible, ¿cuántos divisores tiene?

a) 20 b) 24 c) 36
d) 40 e) 42

23. ¿Cuántos números enteros existen que sean primos relativos con 10^4 menores que 10^4 ?

a) 3000 b) 4000 c) 6000
d) 2000 e) 7000

24. El número $N = 2^{11} \times 15^k \times 5^k$, tiene 476 divisores que no son divisibles entre 12, ¿Cuántos de sus divisores son cubos perfectos?

a) 64 b) 72 c) 81
d) 142 e) 144

25. ¿Cuántos triángulos isósceles tienen por área $5096cm^2$, siendo los valores de la base y altura medidas en cm, respecto al lado desigual, números enteros?

a) 12 b) 30 c) 18
d) 16 e) 20

26. Si : $4 \times 3^x \times 5^{x+1}$, tiene 12 divisores múltiplos de 25, pero no múltiplos de 2. Determine la suma de los divisores pares de dicho número.

a) 67320 b) 93720
c) 218680 d) 109340
e) 187440

27. Si A y B son números que admiten los mismos divisores primos, sabiendo que A tiene 35 divisores y B tiene 39 divisores.
¿Cuántos divisores tendrá el MCD de A^5 y B^5 ?

a) 330 b) 310 c) 300
d) 341 e) 319

28. Lucía se da cuenta que las edades de sus 2 primos hermanos son números coprimos que se diferencian en 2 años. Además, si al producto de dichas edades le agrega la unidad, obtiene un número que tiene 8 divisores propios y 3 divisores simples.
Calcular la suma de todos los valores que toman dichas edades.
Se sabe que los primos hermanos de Lucía tienen menos de 21 años.

a) 378 b) 92 c) 132
d) 76 e) 60

29. Calcular la suma de los cuadrados de los divisores de 144.

a) 31031 b) 28028 c) 29029
d) 30030 e) 32032

30. Si el número de divisores de $\overline{ab0ab}$ es 40, hallar el máximo valor de "a + b" .

a) 8 b) 9 c) 12
d) 17 e) 13

31. Dadas las proposiciones:

I. Si en un conjunto de números hay por lo menos dos números primos, entonces es un conjunto de primos relativos.
II. Forman un conjunto de primos relativos los números: a; b; c; d y (c + 1)
III. El número $N : (a \times b \times c \times d \times ...) + 1$ es primo si a; b; c; .... son números primos.
Los respectivos valores de verdad son:

a) VVV b) VFV c) VVF
d) VFF e) FFF

32. Si el número: $N = a^m \times b^n$ está descom-puesto canónicamente y tiene 144 divisores, calcular cuántos valores puede adoptar m.

a) 14 b) 12 c) 13
d) 15 e) 16

33. El número $N = 3^b \times 5^a$, tiene 3 divisores más que el número $M = 2^a \times 5^3$.
Hallar la diferencia de los números, e indicar la suma de cifras del resultado.

a) 5 b) 9 c) 11
d) 13 e) 7

34. Indicar "V" o "F".

I. $2^{2^n} + 1$ es primo, $\forall n \in Z, n \geq 1$.
II. El divisor menor, distinto de la unidad, de un entero mayor que la unidad, es un número primo.
III. Sea "d" el menor divisor de un número compuesto N, entonces $d \geq \sqrt{N}$.

a) FFF b) FVV c) FVF
d) FFV e) VVV

35. Laura desea saber cuántos números que tengan a lo más cinco cifras existen, tal que cumplan que la suma de sus cifras es 18 y tengan 21 divisores.

a) 13 b) 9 c) 7
d) 4 e) 1

36. ¿Cuántos de los divisores del número $14^4 \times 625 \times 11^3$ son cuadrados perfectos?

a) 27 b) 36 c) 54
e) 18 e) 81

37. ¿Cuántos números de 3 cifras son primos relativos con 6?

a) 200 b) 150 c) 300
d) 600 e) 450

38. Determinar el valor de "n" si: 175×245^n tiene 28 divisores que no son $\overset{o}{35}$.

a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9

39. Al expresar 28884 en base "n" su última cifra fue 9, ¿Cuántos valores toma "n"?

a) 16 b) 18 c) 21
d) 28 e) 32

40. Un número contiene 2 divisores primos y 12 divisores compuestos. Si la suma de todos sus divisores es 403, determinar la media armónica de todos sus divisores.

a) 5,31 b) 5,36 c) 5,32
d) 5,38 e) 5,40

41. Sean p, q y r enteros de 1, 2 y 3 cifras respectivamente, que son primos absolutos y están en progresión aritmética de razón t, siendo r el menor primo absoluto de 3 cifras.
¿Cuántos divisores tiene t?

a) 8 b) 10 c) 12
d) 14 e) 16

42. En el año 1556, el célebre matemático Tartaglia afirmaba que las sumas: $1+2+4$; $1+2+4+8$; $1+2+4+8+16$; ..... son alternadamente números primos y compuestos.
¿Cuál es el primer número de esta serie que no concuerda con ser prima?
Indique la suma de las cifras.

a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8

43. Las edades de los profesores Carranza, Lau y Pizarro son $\overline{ab}$, $\overline{co}$ y $\overline{de}$ años, respectivamente. Dichas edades tienen 3, 8 y 6 divisores; donde $\overline{ab}$ y $\overline{co}$ son coprimos; además $\overline{de}$ tiene tantos divisores comunes con $\overline{ab}$ y $\overline{co}$.
Indique, ¿cuántos años le lleva el profesor Carranza al profesor Pizarro?

a) 11 b) 18 c) 32
d) 16 e) 21

44. Si A y B son números que admiten los mismos divisores primos, sabiendo que A tiene 35 divisores y B tienen 39 divisores.
Calcular cuántos divisores compuestos tendrá $A \times B$. (Considerar que A y B son mínimos)

a) 112 b) 115 c) 119
d) 123 e) 130

45. Sabiendo que $\overline{abcba}$ es $\overset{o}{385}$ y además que $A = \overline{ab}^{k} \times \overline{bc}$ posee 42 divisores que terminan en un cero.
Hallar el valor de "k"

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

46. Indicar: (a + b) sabiendo que el número $N = 5000 \times 3^{a} \times 7^{b}$ tiene 240 divisores, donde a y b son cifras significativas no consecutivas.

a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 3

47. Hallar las 3 últimas cifras al expresar 1087^{723} en el sistema senario.

a) 133_6 b) 331_6 c) 431_6
d) 231_6 e) 333_6

48. Sea : $A = 2^{2} \times 3^{x} \times 5^{y}$.
Si A posee 18 divisores múltiplos de 3 y 9 divisores múltiplos de 25.
Calcule: $\phi(\overline{xy} + \overline{yx})$

a) 42 b) 36 c) 20
d) 14 e) 40

49. Si el número entero: $N = 5^{\overline{abc}} + \dfrac{7\,\overline{abc}}{2}$
Al ser dividido entre 36 deja como residuo 11. Determinar el menor valor que toma $\overline{abc}$; indicar su cantidad de divisores propios.

a) 11 b) 14 c) 17
d) 20 e) 24

50. Hallar en cuántos ceros termina $(55555!)^{3}$ escrito en el sistema de numeración de base 6.

a) $125523_{(6)}$ b) $125253_{(6)}$
c) $125522_{(6)}$ d) $125252_{(6)}$
e) $152256_{(6)}$

51. Si el número $2^{7} \times 3^{a+2} \times 7^{a} \times 11$ tiene 24 divisores primos con 440, hallar el valor de "a"

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

52. Averiguar en cuántos ceros termina $\left(25^{100}\right)!$

a) $\dfrac{5^{100}-1}{2}$ b) $\dfrac{5^{200}-1}{2}$
c) $\dfrac{5^{200}-1}{4}$ d) $\dfrac{5^{200}-1}{3}$
e) 5^{100}

53. Determinar el numeral de la forma: $N - A^{a} \times B \times C$ (Donde A, B y C son factores primos).
Sabiendo que la suma de divisores es 14 veces su cantidad de divisores. Además al dividir $\overline{AB}$ entre 4 se obtiene C de cociente y resto máximo, en cambio al dividir $\overline{AC}$ entre 8 se obtuvo B de cociente y resto mínimo.
Dar como respuesta la suma de cifras del numeral pedido.

a) 2 b) 3 c) 4
d) 6 e) 9

54. Si $\overline{mn0} = a! + b! + c!$, ¿en cuántos ceros termina el mayor $\overline{ac}!$ cuando se expresa en base 6?

a) 22 b) 30 c) 35
d) 25 e) 31

55. Dados los números naturales "m" y "n", se cumple que "m" y "n" son primos relativos, entonces $m^{\phi(n)} = \overset{o}{n} + 1$.
Siendo $\phi(n)$ la función de Euler o el indicador del número "n".
Aplicando la relación anterior, hallar 3 últimas cifras del desarrollo de 13^{296} expresando en base 7.

a) 334 b) 239 c) 331
d) 332 e) 212

56. El máximo número de términos de una progresión aritmética de razón 210 cuyos términos son todos números primos es :

a) 9 b) 10 c) 11
d) 12 e) 13

57. Si : $\overline{mmmmm}_{(n)} = n^5 - 1$

Además : $N = \underbrace{m^a \times n^n \times p^b}_{\text{(Descomposición canónica)}}$

Donde: N posee 60 divisores cuya suma de cifras es divisible por 9 y 80 divisores cuya última cifra es cero. Calcular "a + b"

a) 9 b) 10 c) 12
d) 13 e) 15

58. Si el numeral $(999!)^5$ se escribe en base 14, ¿en cuántos ceros termina?.

a) 386 b) 802 c) 8020
d) 820 e) 186

59. Colocar "V" si es verdadero o "F" si es falso según corresponda en:

I. Si $\overline{mnp}$ es número primo, entonces $\overline{ab}^{\overline{mnp}} = \overline{\overline{mnp}^{o} + \overline{ab}}$.

II. Si $N = a^2 - b^2$ además N es el menor número primo de 5 cifras, entonces $CD_{(a+b)} = 2$.

III. Entre 216 y 7560 existen 15120 números PESI con 72.

a) VFV b) FVF c) VVV
d) FFV e) VVF

60. Sabemos que el número, cuya descomposición canónica es $a^3 \times b^5$ (a < b) y $\overline{aabb}$ sólo tienen 2 divisores comunes.
Determinar el número de valores de "a".

a) 3 b) 2 c) 5
d) 1 e) 4

Claves

01.	e
02.	c
03.	b
04.	d
05.	b
06.	c
07.	a
08.	e
09.	c
10.	b
11.	d
12.	c
13.	a
14.	d
15.	b
16.	e
17.	a
18.	e
19.	d
20.	d
21.	b
22.	c
23.	b
24.	b
25.	b
26.	e
27.	d
28.	e
29.	a
30.	b

31.	c
32.	c
33.	d
34.	d
35.	d
36.	c
37.	c
38.	d
39.	d
40.	b
41.	b
42.	d
43.	e
44.	e
45.	e
46.	c
47.	b
48.	c
49.	a
50.	a
51.	d
52.	c
53.	d
54.	b
55.	c
56.	b
57.	a
58.	d
59.	e
60.	b

Capítulo

17

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Euclides fue un matemático griego que nació el año 365 a.C. en Alejandría, Egipto, y murió alrededor del 300 a.C.
Probablemente estudió en Atenas con discípulos de Platón. Enseñó Geometría en Alejandría y allí fundó una escuela de matemáticas.
Su obra principal, Elementos de Geometría, es un extenso tratado de matemáticas en 13 volúmenes que se ha utilizado como texto durante 2.000 años, e incluso hoy, una versión modificada de sus primeros libros constituye la base de la enseñanza de la geometría plana. En el volumen IX, Euclides demuestra que la cantidad de números primos es infinita.

INTRODUCCIÓN

Al considerar el conjunto de los enteros positivos, una de las partes de la ***Teoría de Números***, es el cálculo del M.C.D. y el M.C.M. de varios números.
Se sabe que ya antes de nuestra era, Euclides aportaba (en su obra Elementos) el algoritmo de la división que nos da la obtención del M.C.D.
Este algoritmo tiene su aplicación en las fracciones continuas.

NOCIONES PRELIMINARES

I. DIVISOR COMÚN: Se llama divisor común de un conjunto de números enteros, a aquel número entero positivo que se encuentra contenido en todos ellos una cantidad entera y exacta de veces.

Ejemplo:

Los divisores de 12 ; 18 y 30 son:
D(12) = {***1***; ***2***; ***3***; 4; ***6***; 12}
D(18) = {***1***; ***2***; ***3***; ***6*** ; 9; 18}
D(30) = {***1***; ***2***; ***3***; 5; ***6***; 10; 15; 30}
Como Ud. observará los divisores comunes son:

1; 2; 3 y 6

Entonces llamaremos Máximo Común Divisor al mayor de los divisores comunes. En consecuencia el M.C.D. (12; 18; 30) = 6

* ***MCD :*** El Máximo Común Divisor de dos o más números enteros (por lo menos uno distinto de cero) cumple dos condiciones.

i) Es un divisor común positivo.
ii) Es el mayor posible

Ejemplos:

M.C.D (8 ; 12) = 4
M.C.D (– 8 ;12) = 4
M.C.D (8 ; – 12) = 4
M.C.D (– 8 ; – 12) = 4

Obs:

* MCD(0 ; 0) no existe
* MCD (a ; 0) = |a| , $a \neq 0$

Teorema: Si a y b son enteros, no ambos cero, entonces el MCD de a y b es el menor entero positivo que puede ser expresado como una función lineal homogénea de a y b.

MCD (a ; b) = xa + yb

Donde : x , y enteros.

IMPORTANTE:

Sean A y B dos enteros si el M.C.D (A;B) = d

Entonces: $A = \overset{o}{d} \ \wedge \ B = \overset{o}{d}$

II. MÚLTIPLO COMÚN: Es aquel entero que contiene a otro un número entero y exacto de veces.

Ejemplo:

Los múltiplos positivos de 6 y 9 son:

$\overset{o}{6} = \{6; 12; \mathbf{18}; 24; 30; \mathbf{36}; ...\}$

$\overset{o}{9} = \{9; \mathbf{18}; 27; \mathbf{36}; 45; ...\}$

Los múltiplos comunes a 6 y 9 son:

{ 18; 36; 54; ....}

Entonces se llama Mínimo Común Múltiplo al menor de los múltiplos comunes positivos.

En consecuencia el M.C.M (6 ; 9) = 18

NOTA:

* Los divisores del M.C.D. de varios números, son los divisores comunes de estos números.
* Los múltiplos comunes a varios números, son los múltiplos del M.C.M. de aquellos números.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Calcule (a + b + c) si el M.C.D. de $\overline{1ab7}$ y $\overline{1cb3}$ es 99.

2. ¿Cuántos números de 2 cifras son divisibles entre 8 y entre 12 simultáneamente?

MÉTODOS PARA CALCULAR EL M.C.D. Y M.C.M.

1. Por descomposición simultánea

Se colocan los números uno a la derecha del otro y luego se traza una línea vertical, comenzando a extraer los factores primos comunes, cuando los números no contengan factores comunes, o sea, sean P.E.S.I. el producto de dichos factores comunes será el M.C.D. Para el M.C.M. se sigue extrayendo los factores no comunes hasta que quede la unidad y el producto de los factores primos comunes y no comunes será el M.C.M.

Ejemplo:

Calcule el M.C.D. y M.C.M. de los números 504; 756 y 1050.

2. Por descomposición canónica:

El M.C.D. de varios números viene a ser el producto de los factores primos comunes elevados a su menor exponente; mientras que el M.C.M. viene a ser el producto de los factores primos comunes y no comunes elevados a su mayor exponente.

Ejemplo:

Calcule el M.C.D. y M.C.M. de:

$$A = 24^5 \times 21^4 \quad \wedge \quad B = 28^3 \times 35^4$$

3. Por divisiones sucesivas (Algoritmo de Euclides)

Fundamento Teórico: En toda división inexacta el M.C.D. del dividendo y el divisor es numéricamente igual al M.C.D. del divisor y el residuo que origina esta división:

$$\begin{array}{c|c} A & B \\ r & q \end{array}$$

M.C.D. (A , B) = M.C.D. (B , r)

Procedimiento:

Dados dos enteros A y B con A > B

	q_1	q_2	q_3	⋯		q_{n-1}	q_n	→ Cocientes
A	B	r_1	r_2	⋯		r_{n-2}	r_{n-1}	→ M.C.D
r_1	r_2	r_3		⋯		0		→ Residuos

Ejemplo:

Calcule el M.C.D. de:

a) 540 y 220

b) 779 y 943

PROPIEDADES DEL M.C.D Y M.C.M

1. Si varios números son P.E.S.I. el M.C.D. de ellos es igual a la unidad.

2. Si a varios números los multiplicamos o dividimos por un mismo número entero, el M.C.D. y el M.C.M. de ellos quedarán multiplicados o divididos por dicho entero.

3. Si a varios números los dividimos entre su M.C.D. los cocientes obtenidos serán P.E.S.I.

4. El producto de 2 números será siempre igual al producto del M.C.D. y el M.C.M. de aquellos números.

5. Si un conjunto de enteros se reemplazan dos o más de ellos por su M.C.D. o su M.C.M. entonces el M.C.D. o el M.C.M. del conjunto de dichos enteros no se altera.

6. Si un número es múltiplo de otros, será múltiplo del M.C.M. de aquellos números.

7. Si el M.C.D.(a , b) = d y el M.C.M.(a , b) = m entonces el $MCD(a^n , b^n) = d^n$ y el $MCM(a^n , b^n) = m^n$

8. Sean los números $N = a^p - 1$ y $M = a^q - 1$.

   Entonces el $MCD(N;M) = a^{MCD(p;q)} - 1$

¡Demostrar cada una de estas propiedades!

EJERCICIOS DE APLICACIONES

1. Si M.C.D. (3A ; 27B) = 12.
   Calcular el M.C.D. (5A ; 45B)

2. Si el M.C.M. de 2 números PESI es 40; encuentre las posibles parejas de números que cumplen tal condición.

3. Calcule el M.C.D. de $324 + 180(\overline{ab4})$ y $324 + 180(\overline{ab3})$

4. Encuentre la suma de todos los números de 3 cifras menores que 600, tal que sean $(\overset{o}{5}+1)$; $(\overset{o}{7}+6)$ y $\overset{o}{3}$ a la vez.

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. La razón entre el Máximo Común Divisor de 210 y 35 y el Mínimo Común Múltiplo de 11, 18 y 12 es:

a) $\frac{7}{396}$ b) $\frac{35}{396}$ c) $\frac{35}{428}$
d) $\frac{5}{1128}$ e) $\frac{35}{216}$

02. Calcular el M.C.D. de 80^{24} y 60^{36}.

a) 20^{12} b) 40^{24} c) 30^{24}
d) 18^{20} e) 40^{32}

03. El número de divisores comunes de los números: 1760913 y 83853 es:

a) 20 b) 23 c) 24
d) 27 e) 28

04. Se han dividido tres barras de acero de 54, 48 y 36 cm en trozos de igual longitud, siendo ésta la mayor posible.
¿Cuántos trozos se han obtenido?

a) 6 b) 23 c) 18
d) 9 e) 8

05. Se han dividido 4 barras de fierro de 64 cm, 52 cm, 28 cm y 16 cm en partes de igual longitud. Siendo ésta la mayor posible, ¿cuántos trozos se han obtenido?

a) 32 b) 24 c) 27
d) 40 e) 23

06. Se trata de formar un cubo con ladrillos cuyas dimensiones son 20 cm, 15 cm y 6 cm, ¿Cuántos ladrillos son necesarios para formar el cubo más pequeño posible?

a) 180 b) 140 c) 100
d) 160 e) 120

07. Se tiene un terreno triangular cuyos lados son 200 m; 240 m y 260 m. Se colocan estacas en el perímetro cada 4 metros.
¿Cuántas estacas se colocan?

a) 175 b) 155 c) 125
d) 165 e) 185

08. Calcular el M.C.D. de 1457 y 434 por el algoritmo de Euclides, dar como respuesta la suma de los cocientes obtenidos.

a) 10 b) 11 c) 12
d) 13 e) 19

09. La suma de dos números pares es 1248. Si los cocientes sucesivos obtenidos al hallar su M.C.D. fueron 2, 6, 1, 1 y 2; hallar la diferencia de dichos números.

a) 852 b) 398 c) 396
d) 912 e) 456

10. El M.C.D. de 2 números es 8 y los cocientes de las divisiones sucesivas para obtener dicho M.C.D. son 2, 2, 1, 1 y 7.
Hallar los números.

a) 136 y 184 b) 248 y 328
c) 296 y 736 d) 304 y 728
e) 312 y 744

11. Al calcular el M.C.D. de A y B mediante el algoritmo de Euclides, se obtuvo como primeros residuos a 90 y 26; si la suma de los cocientes sucesivos fue 26.
Dar la suma de todos los valores que toma el mayor de dichos números.

a) 18160 b) 19120 c) 54390
d) 62360 e) 91430

12. En el proceso de hallar el Máximo Común Divisor de dos números positivos mediante el algoritmo de Euclides, se obtiene como primer y tercer residuos 1238 y 614, respectivamente. Si el segundo cociente es 2, entonces la suma de las cifras del menor de los números es:

a) 9 b) 8 c) 5
d) 4 e) 6

13. Calcular a + b + c, sabiendo que los cocientes obtenidos al hallar el M.C.D. de $\overline{a(a+1)a}$ y $\overline{(a+1)bc}$ por el algoritmo de Euclides fueron 1, 2 y 3.

a) 10 b) 12 c) 14
d) 15 e) 21

14. Al calcular el M.C.D. de 2 números enteros mediante el algoritmo de Euclides, la segunda división se realizó por exceso y los cocientes sucesivos fueron 5; 2; 3; 1 y 2, respectivamente.
Hallar la suma de dichos números, si es la menor posible, sabiendo además que la suma de los divisores de la diferencia de los 2 primeros residuos es 480.

a) 2000 b) 2625 c) 2560
d) 2025 e) 2750

15. En un corral hay cierto número de gallinas que no pasan de 368 ni bajan de 354. Si las gallinas se acomodan en grupos de 2, 3, 4 ó 5 siempre sobra 1; pero si se acomodan en grupos de 7, sobran 4.
¿Cuántas gallinas hay en el corral si se añaden 6 más?

a) 361 b) 363 c) 365
d) 367 e) 369

16. Un número al dividirlo por 10 da un residuo de 9, cuando se divide por 9 da un residuo de 8, cuando se divide por 8 da un residuo de 7, ..., etc. y cuando se divide por 2 da un residuo de 1, el número es:

a) 59 b) 419 c) 1259
d) 2519 e) 3139

17. A y B son dos números divisibles por 7 tales que al dividirlos entre 2, 3, 4, 5 ó 6 se obtiene siempre 1 de residuo. Si A es el menor número y B el mayor número menor que 1000, entonces el valor de A + B es:

a) 842 b) 1142 c) 782
d) 1022 e) 902

18. Si N es el menor numeral posible tal que al expresarlo en base 7 termina en 3 y al expresarlo en base 11 termina en 5, calcular la suma de cifras de N expresado en base 6 sabiendo que termina en 2.

a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

19. Tres aviones A, B y C parten de una base a las 8 horas. Si A regresa cada hora y cuarto; B, cada $\frac{3}{4}$ de hora y C, cada 50 minutos, se reencontrarán por primera vez en la base a las:

a) 17h 20' b) 18h 20' c) 15h 30'
d) 17h 30' e) 16h 30'

20. Sea N el mayor número de 4 cifras que al dividirlo por 4, 6, 9, 11 y 12 se obtienen restos iguales.
Luego, la suma de las cifras de N es:

a) 17 b) 18 c) 20
d) 21 e) 23

21. La suma del M.C.D. y el M.C.M. de dos números es 92 y el cociente del M.C.M. entre el M.C.D. es 45.
Hallar la suma de los números.

a) 32 b) 14 c) 82
d) 28 e) 15

22. La suma de dos números enteros es 651, el cociente entre sus M.C.M. y M.C.D. es 108, luego la diferencia es :

a) 110 b) 483 c) 77
d) 436 e) 128

23. ¿Cuántos pares de números cumplen que su M.C.D. sea 6 y que su producto sea 142560?

a) 8 b) 7 c) 9
d) 16 e) 15

24. Javier le dice a Teo, el M.C.M. de nuestras edades es el doble de mi edad y el M.C.D. de nuestras edades es la tercera parte de mi edad. Si yo nací 24 años antes que tú, ¿cuál es mi edad?

a) 24 b) 72 c) 36
d) 60 e) 42

25. El M.C.M. de dos números es 630. Si su producto es 3780, ¿cuál es su M.C.D.?

a) 15 b) 12 c) 6
d) 10 e) 9

26. Hallar la diferencia de 2 números enteros sabiendo que su M.C.D. es 48 y que su suma es 288.

a) 96 b) 192 c) 240
d) 288 e) 144

27. Sean A y B dos números enteros cuyo M.C.D. es 12 y la diferencia de sus cuadrados es 20880.
Hallar: A – B

a) 56 b) 40 c) 62
d) 45 e) 60

28. Hallar la suma de 2 números, sabiendo que ambos tienen 2 cifras y 2 factores primos, y que además la diferencia entre su M.C.M. y su M.C.D. es 243.

a) 99 b) 120 c) 141
d) 135 e) 64

29. Calcular la suma de las cifras de la suma de A y B; si: $A^2 + B^2 = 10530$ y el M.C.M.(A ; B) = 297.

a) 11 b) 13 c) 9
d) 10 e) 15

30. El M.C.M. de los números a y b es 88, si $a^2 + b^2 = 2000$, el valor de (a + b) es:

a) 66 b) 52 c) 92
d) 48 e) 28

31. El M.C.D. de (3k + 1), (2k + 7) y (3k + 2) es 6k - 11, entonces el M.C.M. de (k + 8) y (k + 2) es:

a) 16 b) 40 c) 20
d) 14 e) 18

32. Dados 3 números A, B y C. Se sabe que el M.C.D.(A;B)=30 y M.C.D.(B;C)=198.
¿Cuál es el M.C.D. de A, B y C?

a) 3 b) 6 c) 12
d) 15 e) 30

33. El producto de dos números enteros positivos es 360. La suma de los cocientes obtenidos al dividir cada uno de ellos por su Máximo Común Divisor es 7, y el producto de estos cocientes es 10.
Entonces, el valor absoluto de la diferencia de estos números es:

a) 2 b) 31 c) 18
d) 84 e) 54

34. Sea M el M.C.M. de a y b.
Si : $\frac{M}{a} = 110$; $\frac{M}{b} = 21$ y el M.C.D de 7a y 7b es 840.
Calcular: M.

a) 2310 b) 16170 c) 27702
d) 277200 e) 277210

35. Al descomponer en sus factores los números A y B se expresan como:
$$A = 3^{\alpha} \times b^2 \ ; \ B = 3^{\beta} \times a$$
Sabiendo que su M.C.M y su M.C.D son 675 y 45, respectivamente.
Hallar: A + B .

a) 720 b) 810 c) 456
d) 368 e) 860

36. Sean A y B dos números que guardan una relación de 60 a 40. Si el M.C.D. es 9, determine la diferencia de dichos números.

a) 8 b) 9 c) 10
d) 11 e) 12

37. El M.C.D. de los números $\overline{1ab}$ y $\overline{2cd}$ es $\overline{(c+2)5}$.
Luego el valor de $\overline{2cd} - 2(\overline{1ab})$ es:

a) 0 b) -45 c) 45
d) -35 e) 35

38. Sea N un número entero positivo tal que $\text{M.C.D.}\left(\frac{N}{2} ; \frac{3N}{5} ; \frac{4N}{7}\right) = 21$
Entonces la suma de las cifras de N es:

a) 9 b) 10 c) 11
d) 12 e) 13

39. Hallar K sabiendo que:
M.C.D. (210K ; 300K ; 420K) = 1200

a) 6 b) 15 c) 30
d) 40 e) 90

40. Hallar el mayor factor común a los números:
$$(6^{550} - 1) \ ; \ (6^{252} - 1) \text{ y } (6^{312} - 1)$$

a) 5 b) 11 c) 23
d) 31 e) 35

41. Hallar el mayor número de 4 cifras tal que al ser expresado en los sistemas de numeración de bases 3; 4 y 7 sus últimas cifras fueron: 20; 12 y 6 respectivamente. ¿En qué cifra termina si se expresa en base 11?

a) 3 b) 8 c) 12
d) 6 e) 9

42. Sea: $F = \text{M.C.M.}[\underbrace{66.....6}_{164\ \text{cifras}}{}_{7}\ ;\ \underbrace{66.....6}_{205\ \text{cifras}}{}_{7}]$

Hallar la última cifra de F.

a) 4 b) 5 c) 6
d) 0 e) 8

43. ¿Cuántos divisores tiene N, sabiendo que el menor múltiplo común de N, N+1, 2N es 1624?

a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 24

44. Si:
A = M.C.M. (70! ; 71! ; 72! ; ... ; 90!)
$B = \text{M.C.D.}(\underbrace{86!\ ;\ 87!\ ;\ 88!\ ;\ ....}_{23\ \text{números}})$

Calcule en cuántas cifras cero termina $A \times B$ en base 6.

a) 80 b) 85 c) 86
d) 82 e) 87

45. Calcular el M.C.D. de $(11^a - 1)$ y $(11^b - 1)$, sabiendo que: 330 M.C.D. (a , b) = a . b $\wedge$ a + b = 14
M. C. D. (a ; b)

a) $11^6 - 1$ b) $11^{22} - 1$ c) $11^{15} - 1$
d) $11^{10} - 1$ e) $11^{11} - 1$

46. Encontrar la suma de cifras del menor valor de "N", sabiendo que el M.C.D. de $\overline{a3b2}$ y N es 19.
Además se sabe que: $\overline{a3b2} + N = 9025$

a) 7 b) 10 c) 15
d) 19 e) 24

47. Si: $A = \underbrace{77.....7}_{45\ \text{cifras}}{}_{(8)}$; $B = \underbrace{77.....7}_{105\ \text{cifras}}{}_{(8)}$
Hallar la última cifra del M.C.M. (A ; B) escrito en base 17.

a) 3 b) 4 c) 5
d) 7 e) 6

48. Si:

M.C.M. (A ; B ; C) = 102

M.C.D. (A ; B) = 34 y

M.C.D. (B ; C) = 51

Hallar: A + B + C.

a) 187 b) 136 c) 170
d) 153 e) 120

49. Si:

M.C.D. (3A ; 7B) = 10

M.C.D. (7A ; 3B) = 210

Calcular: A + B.

Sabiendo que A y B son los mínimos posibles.

a) 40 b) 60 c) 80
d) 64 e) 100

50. Si: $\text{M.C.D.}\left[\overline{abca}_{(16)}\ ;\overline{aac3}_{(9)}\right] = 8$

Hallar: $\text{M.C.D.}\left[(a+b+c)_{máx}\ ;(a+b+c)_{mín}\right]$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

51. Se toma al azar un número natural n entre 1 y 100. ¿Cuál es la probabilidad de obtener el valor más probable del M.C.D. (n ; 12)?

a) 0,33 b) 0,67 c) 0,17
d) 0,22 e) 0,35

52. ¿En qué cifra termina el M.C.M. de $2 \times \overline{a5!}^{\overline{a5!}}$ y $105^{\overline{a5!}}$ al convertirlo a la base $\overline{a2}$.

a) 5 b) 1 c) 6
d) 0 e) 2

53. Si: $\text{M.C.D.}(\overline{abcda}_{18}\ ;\ \overline{yx4y}_{8}\ ;\ \overline{ab42x}) = 9$,

¿Cuántos divisores tiene $\overline{abx}$, tal que sean múltiplos de b + x?

a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 7

54. Si:

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots}_{(n-1)\ \text{sumandos}}$$

$$B = \underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\ldots}_{\left(\frac{n-2}{2}\right)\ \text{sumandos}}$$

Además: M.C.M. (A ; B) = 171
Calcular el número de divisores comunes que tiene 49n y 280.

a) 48 b) 82 c) 10
d) 11 e) 12

55. Calcular el M.C.M. de:

$$\overline{(a-1)(2a-2)(a+2)} \quad y \quad \overline{(a-1)(a-1)}$$

Sabiendo que son primos entre sí. Se sabe además que la suma de los cocientes sucesivos que se obtuvo al calcular el M.C.D. de ambos números es 21.

a) 5390 b) 4224 c) 2160
d) 3590 e) 1364

56. Sabiendo que:

$$\text{M.C.D.}\left[A!\,;\ (A+1)!\right] = 2^B \times 3^C \times 5^D$$

A + B + C + D = 13

Hallar el M.C.M (A ; B ; C ; D).

a) 12 b) 13 c) 14
d) 15 e) 16

57. El número A tiene 21 divisores y el número B tiene 10 divisores. Si el Máximo Común Divisor de A y B es 18, entonces A + B es:

a) 654 b) 738 c) 756
d) 792 e) 810

58. La diferencia entre el M.C.M. y M.C.D de 3 números es 897, y las diferencias entre el mayor y el intermedio, y el mayor y el menor son 26 y 65, respectivamente. Determine el mayor de los números.

a) 21 b) 31 c) 57
d) 79 e) 91

59. El M.C.M. de 2 números es múltiplo de 22 y tiene 18 divisores, además multiplicado por 10 es menor que 3965. Si el M.C.D. de los números tiene 9 divisores. Dar la diferencia de los 2 números.

a) 36 b) 360 c) 361
d) 396 e) 386

60. El M.C.M. de un capicúa de 4 cifras y el número N es igual al M.C.M. de dicho capicúa y 7N.
Dar la suma de todos los valores que puede tomar dicho capicúa.

a) 45045 b) 90090
c) 97020 d) 50050
e) 116045

Claves

01.	b
02.	b
03.	c
04.	b
05.	d
06.	e
07.	a
08.	e
09.	e
10.	d
11.	c
12.	d
13.	b
14.	b
15.	d
16.	d
17.	d
18.	b
19.	c
20.	d
21.	d
22.	b
23.	a
24.	b
25.	c
26.	b
27.	e
28.	a
29.	c
30.	b

31.	c
32.	b
33.	c
34.	d
35.	a
36.	b
37.	b
38.	d
39.	d
40.	e
41.	a
42.	d
43.	c
44.	
45.	d
46.	b
47.	b
48.	a
49.	e
50.	a
51.	d
52.	d
53.	b
54.	e
55.	a
56.	a
57.	b
58.	e
59.	b
60.	c

Capítulo

18

FRACCIONES

El cálculo con fracciones sencillas para efectos fiscales debía ser frecuente. De igual manera, aparecían en el momento de describir las donaciones que debían efectuarse en los templos y su posible reparto con la particularidad de que encerraban la realización de algunas operaciones aritméticas. Un ejemplo de esto se encuentra en la estela Cairo JE 66285 en la que el faraón Sheshonk I (945-924) detalla las donaciones efectuadas para el culto funerario de su padre Nemrod.
Algunas de las actividades frecuentes consistían en la erección de monumentos, construcción de templos, canales de riego, expediciones comerciales. Todo ello implicaba el alistamiento de campesinos en distintos puntos de Egipto, su traslado, alojamiento y manutención, labores que corrían a cargo de los escribas.
Para calcular el volumen de piedra necesario para determinada tarea, se multiplican las dimensiones, longitud, anchura y grosor y, finalmente, por el número de unidades para llegar al volumen final de piedra. Sin embargo, cuando las medidas se realizaban en fracciones de codo, tal como sucede en las líneas restantes, ello obligaba a la multiplicación de enteros por fracciones y de fracciones entre sí.

INTRODUCCIÓN

Ya hemos visto en división exacta para números enteros, la condición necesaria para que el dividendo sea múltiplo del divisor. Pero en el caso de existir divisiones como: $(11) \div (-5)$, los matemáticos trataron de solucionarlas creando una nueva clase de números, llamados números fraccionarios.

Nuestra escritura decimal es consecuencia directa de la utilización de las fracciones decimales (denominador potencia de 10) cuyo defensor fue Francois Viete (1540-1603), aunque fue Simón Stevin quien en 1585 explicó con todo detalle y de manera muy elemental la utilización de las fracciones decimales.

En 1616, en una obra del escocés John Napier, los números decimales aparecen tal como lo escribimos hoy, con punto decimal para separar la parte entera de la decimal, aunque en algunos países la coma se sustituye por el punto.

NÚMERO RACIONAL

Es aquel número que puede expresarse como: $\frac{a}{b}$ donde $a \in Z \ \wedge \ b \in Z^*$.

El conjunto de los números racionales se denota con la letra Q.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} / a \in Z \ \wedge \ b \in Z^* \right\}; \ Z^* = Z - \{0\}$$

Ejemplos: $\frac{4}{3}; \frac{7}{-3}; \frac{12}{6}, \frac{0}{4}; \frac{16}{10}; .....$

Ejercicio: Demuestre que $\sqrt{3}$ no es racional.

NÚMERO FRACCIONARIO

Es aquel número racional que no es entero.

Ejemplos:

$$\frac{2}{5}; \frac{-3}{4}; \frac{1}{7}; \frac{23}{-2}; .....$$

FRACCIÓN

Una fracción es un número fraccionario de términos positivos.

Ejemplos:

$$\frac{2}{5}; \frac{7}{9}; \frac{4}{8}; .....$$

CLASIFICACIÓN DE LAS FRACCIONES

Sea la fracción $f = \frac{A}{B}$ $(B \neq 0)$

Recuerde A y B $\in Z^+$

I. Por la comparación de sus términos:

a) Propia: $\frac{A}{B}$ es propia $\leftrightarrow$ A < B

Su valor es menor que la unidad

Ejemplos:

$$\frac{3}{5} ; \frac{7}{1000} ; \frac{1}{2597}$$

b) Impropia: $\frac{A}{B}$ es impropia $\leftrightarrow$ A > B

Su valor es mayor que la unidad.

Ejemplos:

$$\frac{5}{2} ; \frac{8}{3} ; \frac{125}{7}$$

Observación:

Una fracción impropia $\frac{A}{B}$ puede convertirse a número mixto efectuando la división entera:

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ r & q \end{array} \Rightarrow \text{La número mixto es : } q\,\frac{r}{B}$$

Ejemplo:

$$\frac{15}{7} \text{ es } 2\frac{1}{7}$$

Porque : $\begin{array}{r|l} 15 & 7 \\ 1 & 2 \end{array}$

Toda número mixto $q\frac{r}{B}$ se puede expresar como : $q + \frac{r}{B}$

$$\boxed{q\,\frac{r}{B} = q + \frac{r}{B}}$$

II. Por su denominador:

a) Decimal: Cuando el denominador es una potencia de 10.

Ejemplos:

$$\frac{1}{100} ; \frac{3}{10} ; \frac{8}{1000}$$

b) Ordinaria: Cuando el denominador no es una potencia de 10.

Ejemplos:

$$\frac{3}{7} ; \frac{4}{6} ; \frac{5}{2}$$

III. Por grupos de fracciones:

a) Homogéneas: Cuando todas las fracciones de un grupo tienen el mismo denominador.

Ejemplo:

Las fracciones $\frac{5}{7} ; \frac{9}{7} ; \frac{11}{7}$ son homogéneas

b) Heterogéneas: Cuando todas las fracciones de un grupo no tienen el mismo denominador.

Ejemplos:

$$\frac{5}{8} ; \frac{7}{4} ; \frac{5}{6}$$

IV. Por los divisores comunes de sus términos:

a) Reductibles: $\frac{A}{B}$ es reductible $\leftrightarrow$ A y B no son PESI.

Ejemplos:

$$\frac{20}{12} ; \frac{15}{75} ; \frac{80}{30}$$

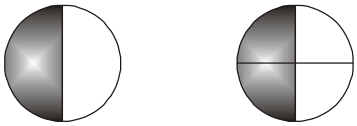
b) Irreductible: $\frac{A}{B}$ es irreductible $\leftrightarrow$ A y B son PESI.

Ejemplos:

$$\frac{7}{5} ; \frac{6}{11} ; \frac{12}{25}$$

FRACCIONES EQUIVALENTES

Son aquellas fracciones que tienen el mismo valor; por ejemplo:



$$\frac{1}{2} \quad < \; > \quad \frac{2}{4}$$

Simplificación de una fracción

Sea $f = \frac{A}{B}$ ***¡Simplificar!***

Bueno, primero calculemos al M.C.D. de A y B entonces:

$$f_I = \frac{\frac{A}{M.C.D.(A,B)}}{\frac{B}{M.C.D.(A,B)}} = \frac{b}{q} \rangle \text{ PESI}$$

Ampliación de una fracción

Sea $f = \frac{p}{q}$ irreductible, la fracción equivalente se obtiene:

$f_e = \frac{pK}{qK}$ con $K \in Z^+$

Ejercicio: Obtener las fracciones equivalentes a $\frac{559}{731}$, cuyos términos son menores que 1000.

PROPIEDADES

1. Si a ambos términos de una fracción propia se le agrega una misma cantidad positiva, la fracción resultante es mayor que la original.

2. Si a ambos términos de una fracción impropia se le agrega una misma cantidad positiva, la fracción resultante es menor que la original.

3. Sea $f_1 = \frac{a}{b}$ y $f_2 = \frac{c}{d}$ entonces:

i) $f_1 > f_2 \leftrightarrow a \cdot d > b \cdot c$

ii) $f_1 < f_2 \leftrightarrow a \cdot d < b \cdot c$

$\forall\, a, b, c \text{ y } d \in Z^+$

4. Si la suma de dos fracciones irreductibles resulta un número entero, entonces sus denominadores son iguales.

¡Demuestre cada una de las propiedades!

FRACCIONES CONTINUAS

Una expresión de la forma:

$a + \cfrac{b}{c + \cfrac{d}{e + ...}}$ se denomina fracción continua.

FRACCIÓN CONTINUA SIMPLE: Es aquella fracción continua de la forma:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + ...}}$$

La cual representaremos como:

$$[a_1 \ ; \ a_2 \ ; \ a_3 \ ; \ ....]$$

Ejemplo:

$2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{5}}}$ se representa [2 ; 3 ; 4 ; 5].

M.C.D. y M.C.M. para fracciones

Sean $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ fracciones irreductibles.

I. $M.C.D. = \frac{M.C.D.(a\,,\,c\,,\,e)}{M.C.M.(b\,,\,d\,,\,f)}$

II. $M.C.M. = \frac{M.C.M.(a\,,\,c\,,\,e)}{M.C.D.(b\,,\,d\,,\,f)}$

Ejemplo : Encuentre el M.C.D. y el M.C.M. de $\frac{27}{35}$, $\frac{12}{25}$, $\frac{18}{50}$

NÚMEROS DECIMALES

Números decimales es la expresión en forma lineal de una fracción, que se obtiene dividiendo el numerador entre el denominador de una fracción irreductible.
Así, tenemos:

* $\frac{4}{5} = 0{,}8$
* $\frac{2}{3} = 0{,}666....$
* $\frac{7}{6} = 1{,}1666....$

CLASES DE NÚMEROS DECIMALES

Los números decimales se clasifican en 2 grandes grupos: números decimales limitados o exactos, e ilimitados o inexactos.

- Número Decimal
  - Dec. Exacto
  - Dec. Inexacto
    - Periódico Puro
    - Periódico Mixto

a) Decimal Exacto

Si el número tiene una cantidad limitada de cifras decimales.

Ejemplos:

1) 0,28 2) 1,375 3) 0,225

Origen: Una fracción irreductible dará origen a un decimal exacto cuando el denominador esté conformado por sólo factores 2, factores 5 o ambos.

Obs.: El número de cifras decimales de un decimal exacto estará dado por el mayor exponente de 2 ó 5 que tenga el denomina-dor de la fracción irreductible.

Ejemplos:

De las fracciones anteriores notamos que son fracciones irreductibles y además generan:

* $\frac{7}{25} = \frac{7}{5^2} = 0,28$ (2 cifras decimales)
* $\frac{11}{8} = \frac{11}{2^3} = 1,375$ (3 cifras decimales)
* $\frac{9}{40} = \frac{9}{5 \cdot 2^3} = 0,255$ (3 cifras decimales)

Conversión de decimal exacto a fracción:

Fracción Generatriz

La fracción generatriz de un decimal exacto será igual al número formado por las cifras decimales, dividida entre la unidad, seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número decimal.

Ejemplo:

$$0,abcd = \frac{\overline{abcd}}{10000}$$

b) Decimal Inexacto

Son números decimales inexactos aquellos que tienen una cantidad de cifras decimales ilimitada.

b.1 D. I. Periódico Puro: Se dice que es Periódico Puro cuando la parte decimal consta de una cifra o un grupo de cifras que se repetirá indefinidamente (a estas cifras que se repiten se les denomina periodo) y se las indica con un arco encima.

Origen: Una fracción irreductible originará un decimal Periódico Puro cuando el denominador sea diferente de un múltiplo de 2 y/o múltiplo de 5.

Ejemplos

* $\frac{2}{3} = 0,666... = 0,\widehat{6}$
* $\frac{10}{11} = 0,9090... = 0,\widehat{90}$
* $\frac{35}{27} = 1,296296... = 1,\widehat{296}$

El número de cifras del periodo está dado por la cantidad de cifras del menor número formado por cifras 9 que contengan exactamente al denominador de la fracción generatriz.

Ejemplos:

$\frac{2}{3} = 0,\widehat{6}$ { Al denominado r lo contiene "9" (un nueve, entonces tiene una cifra en el periodo).

$\frac{10}{11} = 0,\widehat{90}$ { Al denominado r lo contiene "99" (dos nueves), entonces el periodo tiene dos cifras.

Descomposición Canónica de los números de cifras 9

Para un fácil manejo del cálculo del número de cifras de un decimal periódico puro, es recomendable recordar la siguiente tabla:

$$9 = 3^2$$
$$99 = 3^2 \cdot 11$$
$$999 = 3^3 \cdot 37 = 27 \cdot 37$$
$$9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$$
$$99999 = 3^2 \cdot 41 \cdot 271$$
$$999999 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$$

Conversión de D.I. Periódico Puro a fracción:

Fracción Generatriz

La fracción generatriz de un D.I. Periódico Puro está dado por el número formado por las cifras del periodo, dividido entre tantos nueves como cifras tenga el periodo.

Sea: $0,\widehat{abc}$ entonces :

$$0,\widehat{abc} = \frac{\overline{abc}}{999}$$

b.2. D. I. Periodo Mixto: Una expresión decimal es periódica mixta cuando después de la coma decimal el periodo se inicia después de una cifra o grupos de cifras. Al grupo inicial anterior al periodo se le llama parte no periódica.

Ejemplos:

* $0,8333... = 0,8\widehat{3}$
* $1,59090... = 1,5\widehat{90}$

Origen: Una fracción irreductible dará origen a un decimal inexacto periódico mixto cuando al descomponer el denominador en sus factores primos se encuentran potencias de 2 y/o 5 y además, algún otro factor necesariamente diferente:

Ejemplos:

* $\frac{7}{44} = \frac{7}{2^2 \times 11} = 0,590590... = 0,1\widehat{590}$
* $\frac{95}{148} = \frac{95}{2^2 \times 37} = 0,64189189... = 0,64\widehat{189}$

La cantidad de cifras no periódicas del decimal inexacto periódico mixto está dado por la regla para el número de cifras decimales de un decimal exacto, y el número de cifras del periodo está dado por la regla del número de cifras de un D.I. Periódico Puro.

Ejemplos:

$$\frac{95}{148} = \frac{95}{2^2 \times 37} = 0,64\overset{\frown}{189}$$

El denominador, el exponente del factor 2 que es "2" genera 2 cifras no periódicas y el factor 37 está contenido por 999 (tres "9") por lo que genera 3 cifras periódicas.

Conversión de un D.I. Periódico Mixto a fracción:

Fracción Generatriz

La fracción generatriz de un D.I.P. Mixto estará dado por el número formado por la parte no periódica, seguida de la parte periódica, menos la parte no periódica, todo entre el número formado por tantos nueves como cifras tenga el periodo, seguido de tantos ceros como cifras tengan la parte no periódica.

Ejemplo:

0,29545454...

$$0,2\overset{\frown}{954} = \frac{2954 - 29}{9900} = \frac{2925}{9900} = \frac{13}{44}$$

Dos nueves

Dos ceros

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Si gasté los $\frac{2}{3}$ de lo que no gasté, entonces lo que no gasté representa:

a) $\frac{3}{5}$ de mi dinero.
b) $\frac{3}{2}$ de mi dinero.
c) $\frac{1}{3}$ de mi dinero.
d) $\frac{2}{5}$ de mi dinero.
e) $\frac{4}{5}$ de mi dinero.

02. Un niño tiene 100 soles ahorrados. Con la cuarta parte compra un juguete; con la tercera parte del resto compra lapiceros, y con la mitad que le queda compra fruta. Los ahorros iniciales se han reducido a:

a) S/. 10 b) S/. 5 c) S/. 25
d) S/. 20 e) S/. 15

03. Al preguntársele a un postulante qué parte del examen ha contestado, éste responde: he contestado los $\frac{4}{5}$ de lo que no contesté.
¿Qué parte del examen ha contestado?

a) $\frac{5}{9}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{9}$
d) $\frac{4}{9}$ e) $\frac{2}{5}$

04. Si los $\frac{4}{7}$ de los alumnos de un salón de clase no exceden los 12 años de edad y 15 alumnos son mayores de 12.
¿Cuántos alumnos tiene el salón?

a) 21 b) 23
c) El problema no tiene solución
d) 35 e) 26

05. ¿Qué parte de $\frac{4}{9}$ es la mitad del triple de $\frac{5}{6}$?

a) $\frac{5}{9}$ b) $\frac{9}{5}$ c) $\frac{45}{16}$
d) $\frac{16}{45}$ e) $\frac{5}{4}$

06. Una pelota rebota $\frac{1}{3}$ de la altura desde la cual es lanzada. Si parte de 18 de altura, entonces la distancia total recorrida hasta detenerse es:

a) 24 b) 38 c) 36
d) 27 e) 30

07. De una piscina se sacan 40 litros, si había $\frac{2}{3}$ y quedan $\frac{3}{5}$. ¿Cuántos litros se necesitarán para terminar de llenar la piscina?

a) 350 b) 310 c) 500
d) 420 e) 240

08. Juan y César tienen cada uno un cierto número de soles. Si César da 18 soles a Juan, tendrán ambos igual cantidad; si por el contrario, Juan da $\frac{5}{7}$ de su dinero a César, el número de soles de éste queda aumentado en $\frac{5}{9}$. ¿Cuántos soles tienen cada uno?

a) 130 y 150 b) 128 y 160
c) 130 y 158 d) 126 y 162
e) 124 y 164

09. Un postulante afirma que de los S/. 140 de propina que le dio su madre gastó las $\frac{3}{4}$ partes de lo que no gastó. ¿Cuánto le quedaría si gasta la cuarta parte de lo que queda?

a) 105 b) 35 c) 60
d) 80 e) 70

10. De un cilindro lleno de agua, se extrae la quinta parte. ¿Qué fracción del resto se debe sacar para que quede solo $\frac{6}{10}$ de su capacidad inicial?

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{10}$ c) $\frac{2}{10}$
d) $\frac{4}{10}$ e) $\frac{3}{5}$

11. De un tonel lleno de vino puro se utiliza la tercera parte. Luego se le llena de agua. Más tarde se vende la quinta parte y se le vuelve a llenar de agua. Finalmente, se vende la mitad.
¿Qué cantidad de vino puro queda aún en el tonel?

a) $\frac{2}{15}$ b) $\frac{4}{15}$ c) $\frac{3}{15}$
d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{2}{3}$

12. Un apostador en su primer juego pierde un tercio de su dinero, vuelve a apostar y pierde los $\frac{4}{7}$ del resto.
¿Qué fracción del dinero que tenía originalmente le ha quedado?

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{14}{15}$ c) $\frac{2}{7}$
d) $\frac{4}{35}$ e) $\frac{8}{35}$

13. Si "a" varía entre 4 y 40 y "b" varía entre 5 y 12, entonces $\frac{a}{b}$ varía entre:

a) $\frac{1}{8}$ y 3 b) 2,4 y 10 c) 0,8 y $\frac{10}{3}$
d) 3 y 8 e) $\frac{1}{3}$ y 8

14. Efectuar y simplificar:

$$E=\left(\sqrt{2,333...}+\sqrt{0,58333...}\right)^2$$

a) $\frac{21}{2}$ b) $\frac{21}{4}$ c) $\frac{7}{2}$
d) $\frac{14}{3}$ e) $\frac{21}{8}$

15. Al desarrollar el producto:

$$P=\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)...\left(1+\frac{1}{3^{2^n}}\right)$$

Se obtiene:

a) $P=1-\frac{1}{3^{2^{n+1}}}$
b) $P=1+3^{2^{n+1}}$
c) $P=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{2^{n+1}}}\right)$
d) $P=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3^{2^{n+1}}}\right)$
e) $P=\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{3^{2^{n+1}}}\right)$

16. La suma del numerador y del denominador de la fracción equivalente a:

$$\left(\sqrt{0,91666...}+\sqrt{3,666...}\right)^2$$

es:

a) 35 b) 33 c) 37
d) 36 e) 38

17. ¿Cuál es el numerador de la fracción equivalente a $\frac{3}{13}$ tal que la suma de sus dos términos es a 480?

a) 90 b) 30 c) 60
d) 80 e) 70

18. La suma de un número y dos veces su inversa es 8,25. ¿De qué número se trata?

a) 2 b) 3 c) 4
d) 0,75 e) 8

19. Una fracción se divide por su inversa y da por resultado: $\frac{289}{529}$. La suma de los términos de la fracción será:

a) 30 b) 35 c) 40
d) 45 e) 50

20. Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son dos fracciones irreductibles tales que su suma es un número entero, entonces podemos afirmar que:

a) a = c b) b = d c) a = d
d) b = c e) a = b

21. Dar (a + b) en : $0,\widehat{ab} + 0,\widehat{ba} = 1,\widehat{4}$

a) 12 b) 13 c) 14
d) 15 e) 16

22. Al escribir la fracción $\frac{98}{23\times 89}$ en la forma $a+\frac{b}{23}+\frac{c}{89}$, siendo a, b, c enteros tales que $1 \le b < 23$, $1 \le c < 89$. Entonces la suma de los numeradores es:

a) 30 b) 31 c) 32
d) 33 e) 34

23. Si la diez milésima parte de x es $\frac{1}{y}$, entonces la décima parte de $\sqrt{xy}$ es:

a) 10^2 b) 10 c) 10^{-1}
d) 1 e) 10^{-2}

24. Hallar 2 fracciones que tengan por numerador la unidad, por denominadores dos números naturales consecutivos, tales que entre ellos se encuentre la fracción $\frac{5}{39}$.

a) $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{11}$
c) $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{7}$ d) $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$
e) $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{8}$

25. Al repartir la fracción decimal 0,5252.... en dos partes proporcionales a $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$; una de las partes es :

a) $\frac{7}{9}$ b) $\frac{7}{13}$ c) $\frac{6}{13}$
d) $\frac{4}{11}$ e) $\frac{8}{33}$

26. Sea $\frac{a}{b} = 2,5252525$, donde a, b son números primos entre sí.
Entonces la suma de las cifras de a, más las cifras de b, es:

a) 4 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9

27. Se tiene dos números consecutivos cuya suma es igual a la cuarta parte del primero, más los cinco tercios del segundo.
El consecutivo de la suma de los dos números es:

a) 18 b) 17 c) 19
d) 20 e) 21

28. Simplificar:

$$x = \frac{0,\overline{2}+0,\overline{3}+.....+0,\overline{7}}{0,3\overline{2}+0,4\overline{3}+.....+0,8\overline{7}}$$

a) $0,8\overline{3}$ b) $\frac{90}{119}$ c) $\frac{119}{450}$
d) $\frac{30}{357}$ e) 0,98

29. Si "a" y "b" son números naturales, hallar la suma de todos los valores posibles de "a" de modo que:

$$\frac{a}{9}+\frac{b}{5} = 3,066....$$

a) 7 b) 21 c) 30
d) 15 e) 45

30. Reducir la expresión:

$$P = \frac{2\left(1,1+\sqrt{0,21}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1,1-\sqrt{0,21}\right)^{\frac{3}{2}}}{3,\overline{9}}$$

a) $\sqrt{0,5}$ b) $\sqrt{1,21}$ c) 0,5
d) 1,21 e) 0,21

31. Encontrar el número racional entre $\frac{2}{13}$ y $\frac{41}{52}$ cuya distancia al primero sea el doble de la distancia al segundo.

a) $\frac{11}{52}$ b) $\frac{19}{52}$ c) $\frac{49}{104}$
d) $\frac{15}{26}$ e) $\frac{9}{13}$

32. Si a dos términos de una fracción ordinaria reducida a su más simple expresión se le suma el cuádruple del denominador y al resultado se le resta la fracción, resulta la misma fracción.
¿Cuál es la fracción original?

a) $\frac{4}{7}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{4}{9}$ e) $\frac{2}{3}$

33. Considere las fracciones ordinarias equivalentes a $1{,}0416\widehat{\ }$. Hallar el denominador de la fracción de menores términos tal que la suma de los mismos sea un múltiplo de 42 comprendido entre 250 y 600.

a) 18 b) 24 c) 72
d) 144 e) 288

34. ¿Cuál es el menor número racional mayor que $\frac{5}{12}$ tal que al sumar n veces el denominador al numerador y n veces el numerador al denominador, se obtiene como nuevo número 2?

a) $\frac{6}{13}$ b) $\frac{8}{15}$ c) $\frac{9}{16}$
d) $\frac{10}{17}$ e) $\frac{8}{19}$

35. ¿Cuántas cifras tiene el periodo de $f = \frac{17}{707}$?

a) 6 b) 4 c) 3
d) 12 e) 24

36. ¿Cuántas cifras el periodo de $f = \frac{41}{7^3 \times 11^2}$?

a) 3234 b) 60 c) 12
d) 864 e) 686

37. Determine la cantidad de cifras no periódicas de $f = \frac{25600}{64! - 32!}$.

a) 20 b) 21 c) 22
d) 23 e) 24

38. Se tiene la siguiente fracción:

$$f = \frac{400(2^{16} + 2^{15} + ... + 2^2 + 2 + 1)}{5^{313}(2^2 + 2 + 1)}$$

¿En qué cifra termina su desarrollo?

a) 4 b) 2 c) 3
d) 1 e) 5

39. ¿Cuál será la última cifra del período de $\left(\frac{1}{3}\right)^{19}$?

a) 9 b) 6 c) 7
d) 1 e) 3

40. Hallar la última cifra del desarrollo decimal de:

$$f = \frac{4000 \times 2^{17}}{5^{313} \times 8}$$

a) 2 b) 4 c) 5
d) 8 e) 6

41. Si a un número racional $\frac{A}{B}$, menor que 1, se le aumenta una unidad, el numerador queda aumentado en 6 unidades. Si el numerador y el denominador difieren en una unidad.

Calcular el número $\frac{A}{B}$.

a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{6}{7}$ c) $\frac{5}{6}$
d) $\frac{7}{6}$ e) $\frac{4}{5}$

42. Halle la suma de términos del periodo de la fracción continua de $\frac{8 + \sqrt{24}}{4}$.

a) 1 b) 2 c) 4
d) 5 e) 6

43. En un triángulo ABC, recto en B, se sabe que

$BC = \left[2; \overline{1; 4}\right]$; $AB = \left[1; \overline{1; 2}\right]$.

Hallar la hipotenusa.

a) $\left[2; \overline{3; 6}\right]$ b) $\left[2; \overline{3; 4}\right]$
c) $\left[3; \overline{1; 6}\right]$ d) $\left[3; \overline{2; 6}\right]$
e) $\left[3; \overline{3; 6}\right]$

44. Se reparte una cantidad de dinero entre cierto número de personas. La primera recibe S/. 100 y $\frac{1}{12}$ del resto, la segunda S/. 200 y $\frac{1}{12}$ del resto y la tercera S/. 300 y

$\frac{1}{12}$ del resto, y así sucesivamente. De esta manera, todos ellos han recibido la misma suma y se ha repartido la cantidad íntegra.
Hallar el número de personas.

a) 12 b) 9 c) 11
d) 13 e) 15

45. Un comerciante tenía una determinada suma de dinero. El primer año gastó 100 pesos y aumentó a lo que quedaba un tercio de este resto. Al año siguiente volvió a gastar 100 pesos y aumentó a la cantidad restante un tercio de ella. El tercer año gastó de nuevo 100 pesos y agregó la tercera parte de lo que quedaba. Si el capital resultante es el doble del inicial, ¿Cuál fue el capital inicial?

a) 1480 b) 1500 c) 1400
d) 2380 e) 2000

46. Si : $n \in Z^+$ $(Z^+ = \{1;2;3;4;....;n\})$

Calcular el valor de:

$$E = \sqrt{\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)...}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)...}}$$

$$\frac{.....\left(1-\frac{1}{n}\right)..... + ... + n + n - 2}{.....\left(1+\frac{1}{n}\right)..... + ... + n(n+1)}$$

a) n b) n(n+1) c) 1
d) 2 e) n + 1

47. Al analizar una fracción el denominador es menor en una unidad que el cuadrado del numerador.
Si al numerador y denominador:

a) Se le restan 3 unidades, la fracción sigue positiva, pero menor que $\frac{1}{10}$.

b) Se le agregan 2 unidades, el valor de la fracción será mayor que $\frac{1}{3}$.

Hallar el valor del numerador.

a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

48. Varios industriales se asocian para la explotación de una patente, el primero cede su explotación con la condición de percibir el 30% del beneficio. El segundo aporta $\frac{5}{24}$ de los fondos necesarios. El tercero pone 4000 unidades monetarias menos, pero realizará funciones de gerente mediante una remuneración suplementa-ria del 10% de los beneficios. El cuarto ingresa 4000 unidades monetarias menos que el tercero, y así sucesivamente hasta el último. Si las aportaciones hubieran sido iguales a la más elevada, el total del capital disponible aumentaría en $\frac{1}{4}$ de su valor.
¿Cuánto aportó el cuarto socio?

a) 50000 b) 4000 c) 42000
d) 38000 e) 44000

49. $(0,ab)_4$ y $(0,ac)_6$, escritos en base 4 y 6 respectivamente, representan al número racional irreductible. $\frac{p}{q} \neq 0$

Calcular: a + b + c + p + q

a) 9 b) 11 c) 13
d) 14 e) 15

50. Dados los números:

$$0,\widehat{ab} = \frac{b-5}{6} \quad \text{y} \quad 0,\widehat{ba} = \frac{5a+6}{18}$$

Hallar la tercera cifra decimal que resulta al sumarlos.

a) 3 b) 6 c) 5
d) 4 e) 7

51. Si: $(0,aaa..)(0,(2a)(2a)(2a)..) = \frac{\overline{(a-2)(a+5)}}{\overline{(a+5)(a-2)}}$.

Hallar la suma de los términos de la fracción generatriz que da origen a la fracción decimal periódica pura:

$$0,(a+1)\ (a+2)\ (a+1)\ (a+2)\ ...$$

a) 20 b) 12 c) 22
d) 16 e) 24

52. Sea a, b, c, d, e $\in Z^+$; además:

$$\frac{105}{38} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \frac{1}{e}}}}$$

Calcular la suma de la cantidad de cifras no periódicas y periódicas que origina la fracción:

$$\frac{\overline{de}}{\overline{b(3c)ba}}$$

a) 5 b) 7 c) 9
d) 10 e) 12

53. Calcular la suma de los infinitos términos dados:

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{2}{7^4} + \frac{1}{7^5} + \frac{2}{7^6} + ...$$

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{3}{32}$ c) $\frac{1}{32}$
d) $\frac{1}{16}$ e) $\frac{3}{16}$

54. El valor de la sumatoria:

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ es:

a) $\frac{n}{2(n+1)}$ b) $\frac{n}{2(n+2)}$ c) $\frac{n+1}{2n}$
d) $\frac{n}{2(n-2)}$ e) $\frac{n}{2(n+3)}$

55. Si: $\frac{2}{x} = 0,\widehat{abcdef}$ y $\frac{5}{x} = 0,\widehat{defabc}$.

Hallar: x. Si : $\overline{def} - \overline{abc} = 429$

a) 13 b) 21 c) 7
d) 39 e) 41

56. Una fracción irreductible tiene la siguiente propiedad al sumar 5 unidades a su numerador y 9 unidades a su denominador, la fracción no cambia de valor.

La suma de sus términos es:

a) 14 b) 27 c) 33
d) 55 e) 44

57. ¿Para cuántos valores de N menores que 100, la siguiente fracción: $\frac{N^2 + 82N}{N+1}$ es reducible?

a) 32 b) 33 c) 34
d) 35 e) 40

58. Si $n \in Z$ tal que $\frac{7n^2 - 5n}{n+1}$ es un número entero.

Calcular la suma de todos los posibles valores de "n".

a) -4 b) -6 c) -9
d) -12 e) -8

59. Si: $0,\widehat{ab}_8 = \frac{1}{5} + \frac{3}{25} + \frac{1}{125} + \frac{3}{625} + ...$

Determinar la cantidad de cifras no periódicas de la fracción: $f = \frac{\overline{ab(b+1)(a-2)(a-2)}}{(b+1)(a+2)! - (b-2)a!}$

a) 14 b) 17 c) 19
d) 21 e) 24

60. Calcule la siguiente suma: $E = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{81} + ...\infty$

Y encontrar la cifra de orden -3 al expresar "E" en base 4.

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) No se puede determinar.

Claves

01.	a
02.	c
03.	d
04.	d
05.	c
06.	c
07.	e
08.	d
09.	c
10.	a
11.	b
12.	c
13.	e
14.	b
15.	c
16.	c
17.	a
18.	e
19.	c
20.	b
21.	b
22.	d
23.	b
24.	e
25.	d
26.	d
27.	a
28.	a
29.	e
30.	c

31.	d
32.	d
33.	d
34.	e
35.	d
36.	a
37.	b
38.	d
39.	c
40.	a
41.	c
42.	e
43.	e
44.	c
45.	a
46.	c
47.	c
48.	c
49.	a
50.	e
51.	d
52.	c
53.	e
54.	b
55.	c
56.	a
57.	b
58.	d
59.	d
60.	a

Í N D I C E

ARITMÉTICA

Primer Bimestre

Pág.

Capítulo 01
Lógica Proposicional *9*

Capítulo 02
Teoría de Conjuntos *21*

Capítulo 03
Razones y Proporciones *31*

Capítulo 04
Promedios *39*

Capítulo 05
Regla Mezcla y Aleación *47*

Capítulo 06
Magnitudes Proporcional *57*

Segundo Bimestre

Capítulo 07
Reparto Proporcional *67*

Capítulo 08
Regla de Tres *77*

Capítulo 09
Tanto por cuanto *85*

Capítulo 10
Regla de Interés *93*

Tercer Bimestre

Capítulo 11
Estadística *101*

Capítulo 12
Numeración *117*

Capítulo 13
Conteo de Números *127*

Capítulo 14
Cuatro Operaciones *135*

Cuarto Bimestre

Capítulo 15
Divisibilidad *145*

Capítulo 16
Números Primos *153*

Capítulo 17
M.C.D. - M.C.M. *163*

Capítulo 18
Fracciones *171*